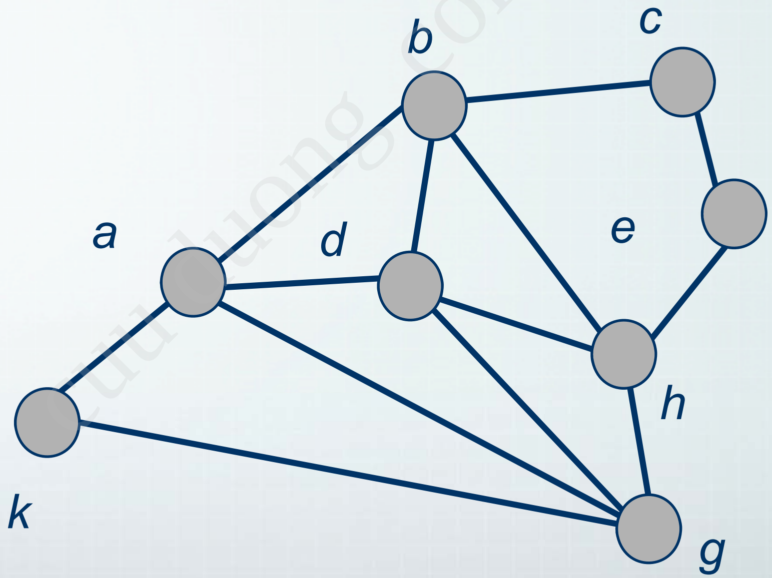
Đồ thị



1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

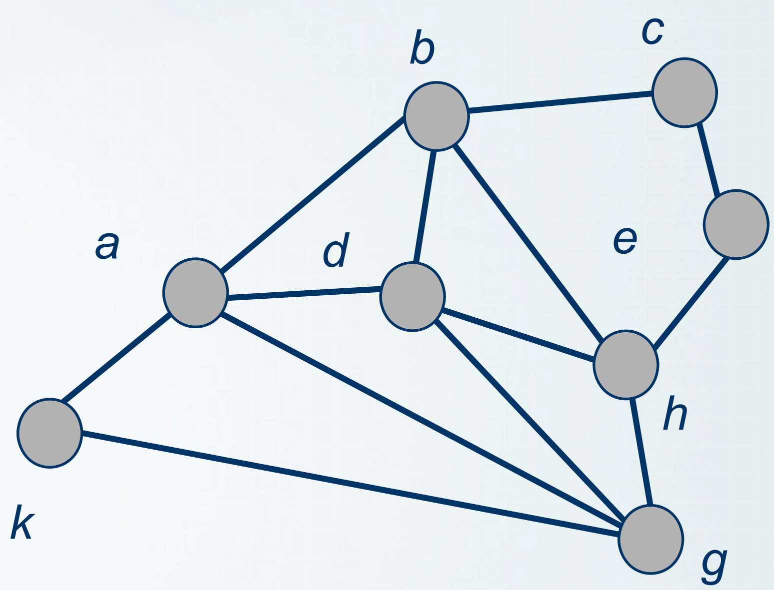
Định nghĩa đồ thị

Định nghĩa 1. Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm:

i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là *đỉnh* (vertex) của G.

ii) E là đa tập hợp gồm các cặp không sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một *cạnh* (edge) của G. Ký hiệu uv.

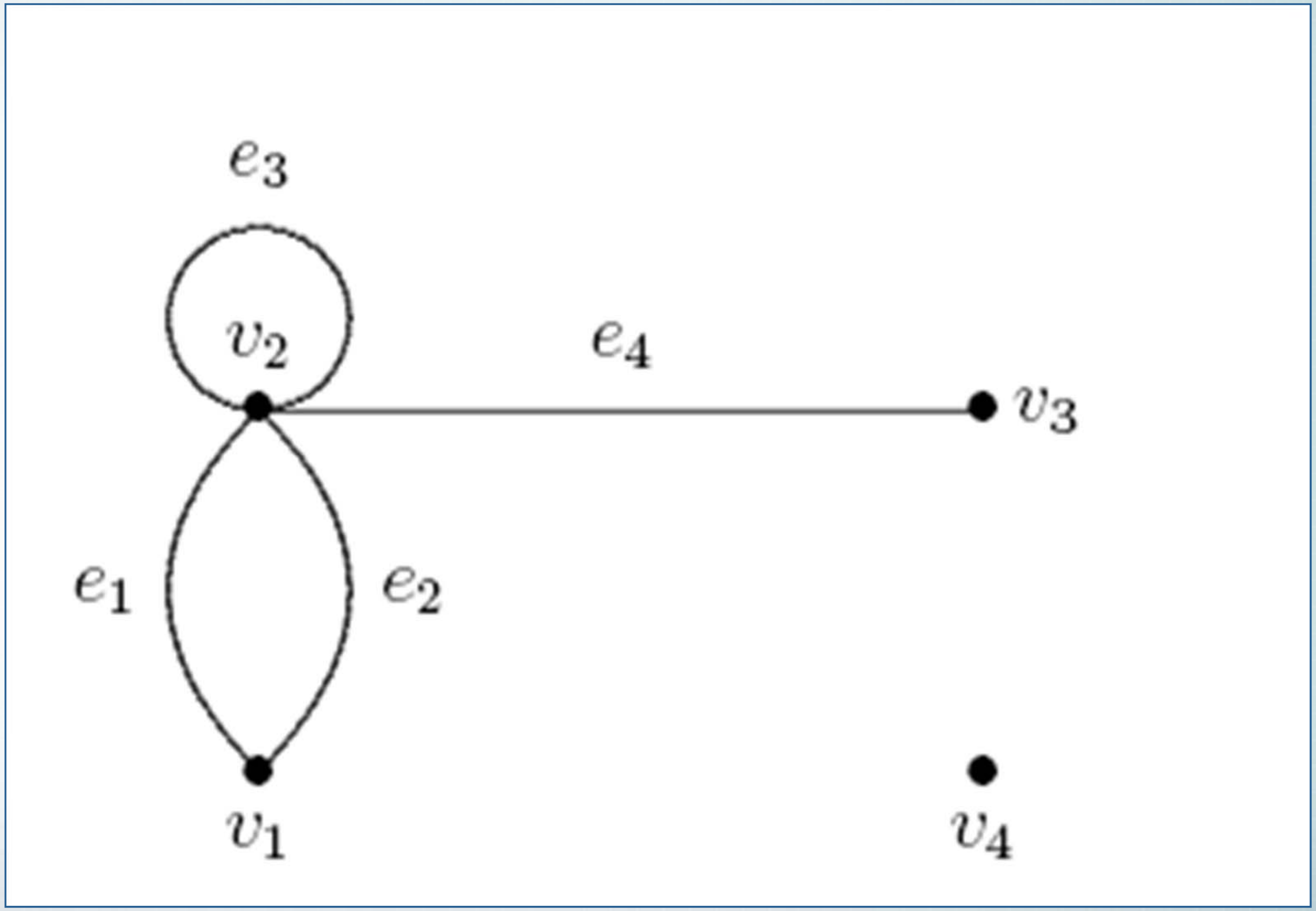
1. Những khái niệm và tính chất cơ bản



1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

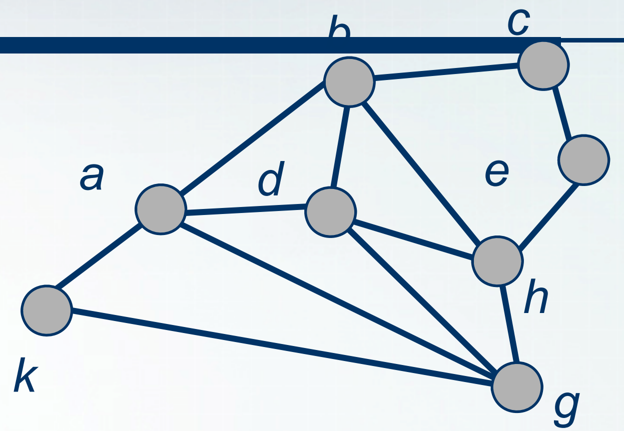
Chú ý

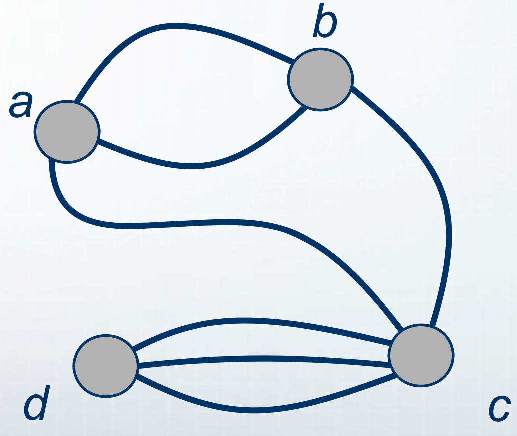
- Ta nói cạnh uv nối u với v, cạnh uv *kề* với u,v.
- Nếu uv$\in$E thì ta nói đỉnh u *kề* đỉnh v.
- Hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh gọi là *hai cạnh song song*.
- Cạnh uu có hai đầu mút trùng nhau gọi là một *khuyên*.

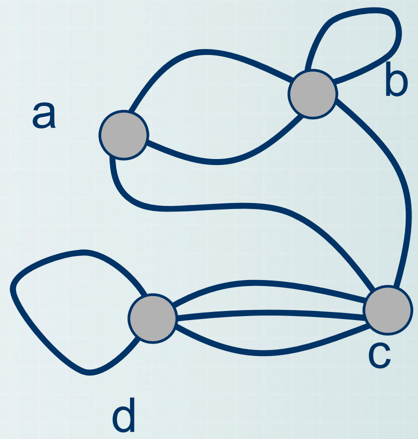

e_3
v_2
e_4
v_3
e_1
e_2
v_1
v_4

1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

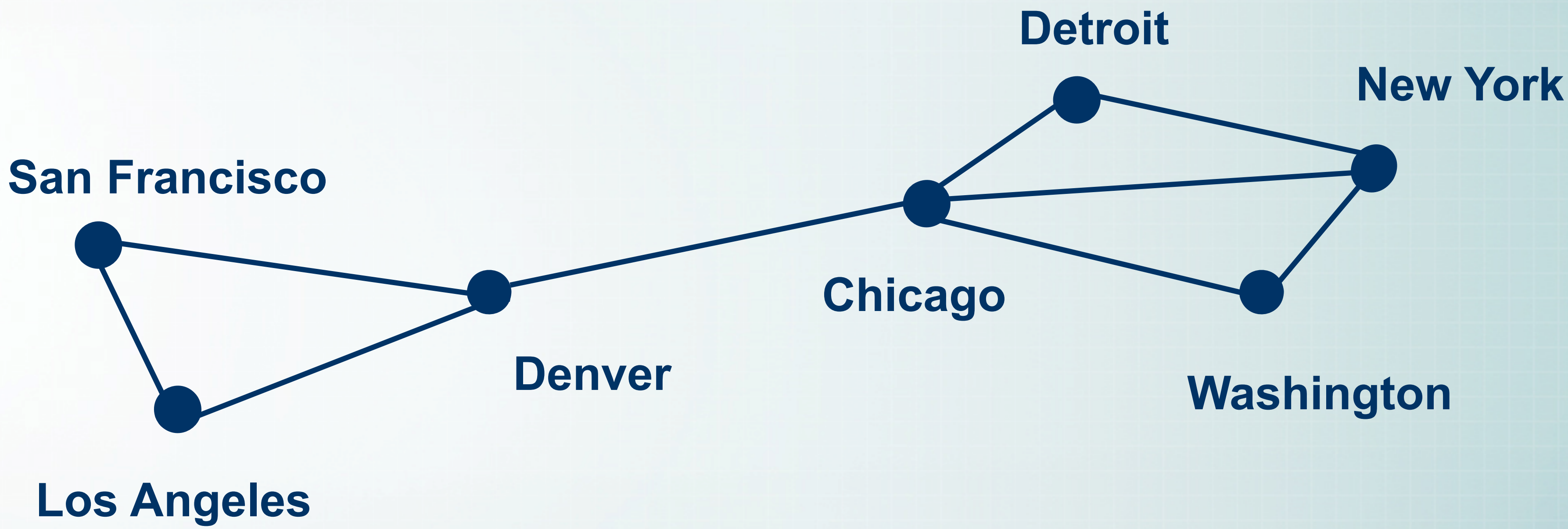
- **Định nghĩa 2.** Đồ thị vô hướng không có cạnh song song và không có khuyên gọi là ***đơn đồ thị vô hướng***.
- **Định nghĩa 3.** Đồ thị vô hướng cho phép có cạnh song song nhưng không có khuyên gọi là ***đa đồ thị*** vô hướng.
- **Định nghĩa 4.** Đồ thị vô hướng cho phép có cạnh song song và có khuyên gọi là ***giả đồ thị***


b
c
a
d
e
h
k
g

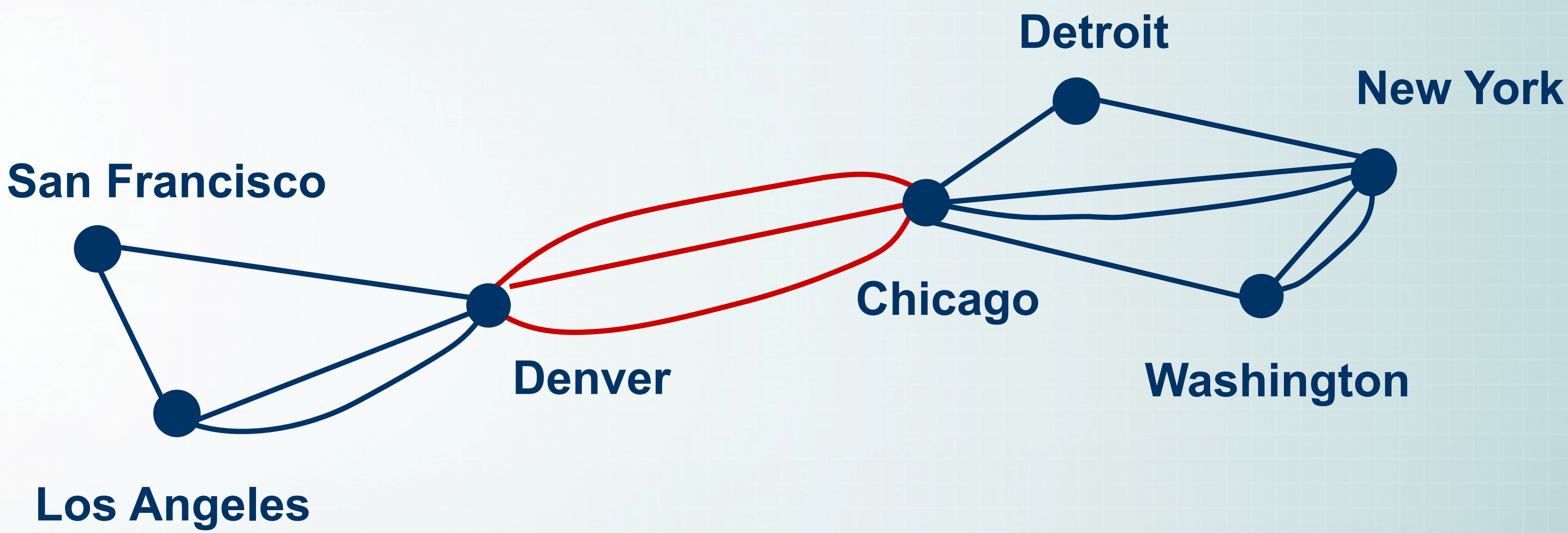

a
b
c
d


b
a
d
c

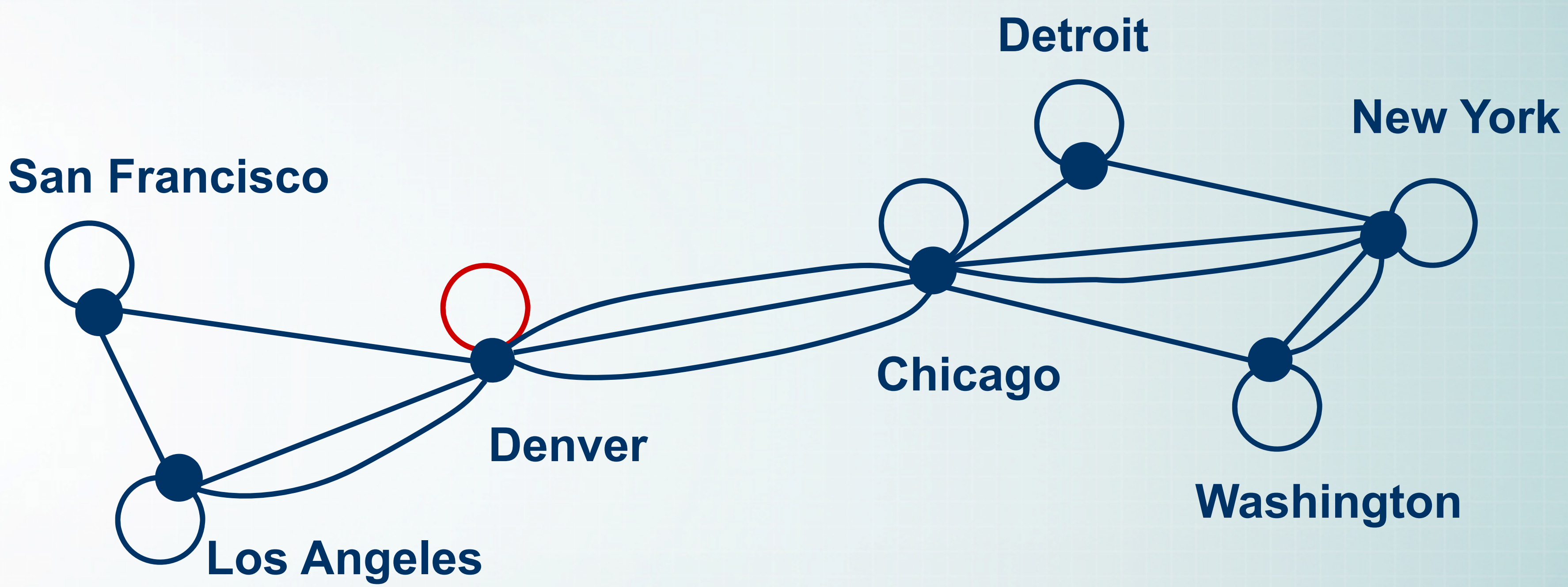
1. Những khái niệm và tính chất cơ bản



1. Những khái niệm và tính chất cơ bản



1. Những khái niệm và tính chất cơ bản



1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

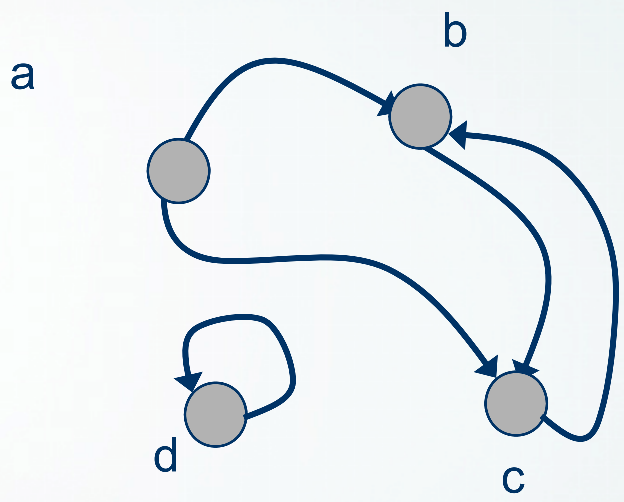
Định nghĩa 5

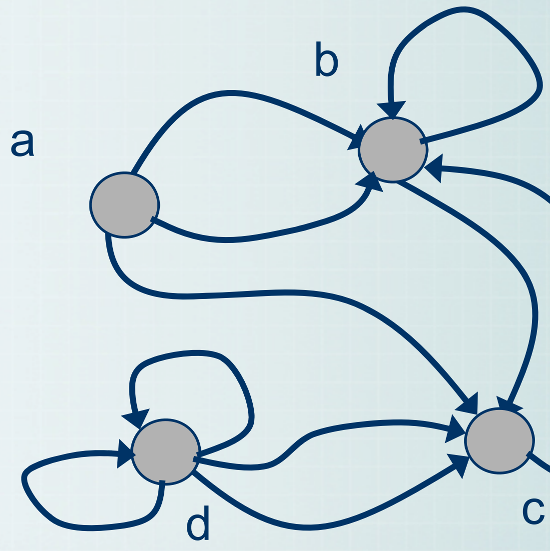
Đa đồ thị **có hướng** G =(V,E) gồm:

i) V là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là *đỉnh* của G.

ii) E là đa tập hợp gồm các cặp có sắp thứ tự của hai đỉnh. Mỗi phần tử của E được gọi là một *cung* (cạnh) của G. Ký hiệu uv.

Ta nói cung uv đi từ u đến v, cung uv kề với u,v

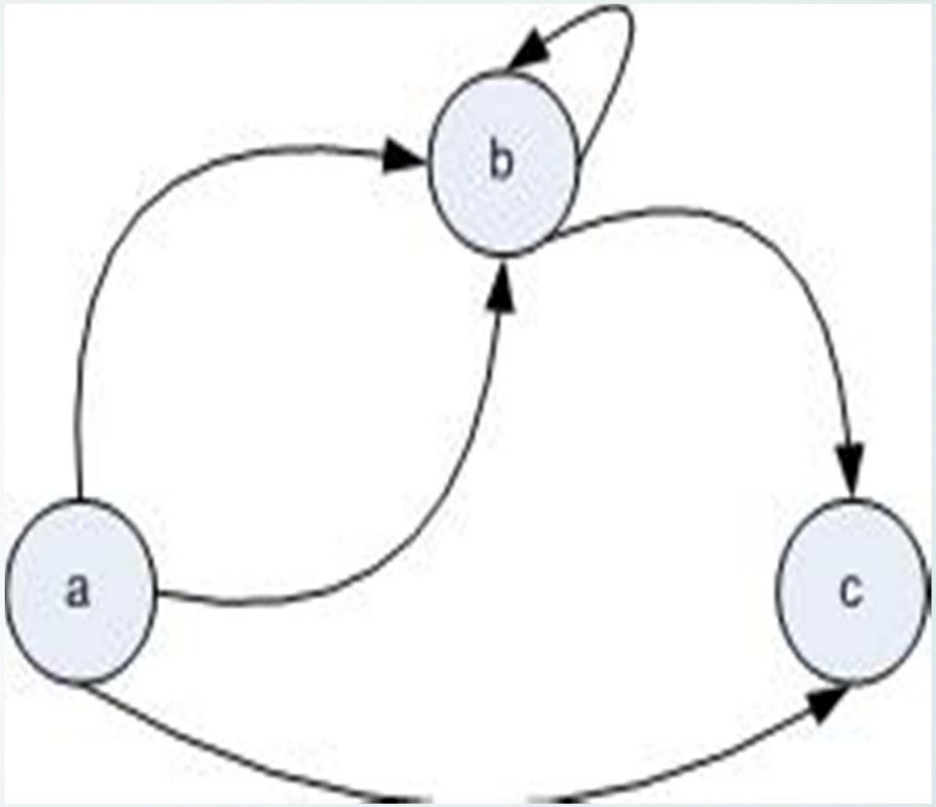

a
b
d
c


a
b
d
c

1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

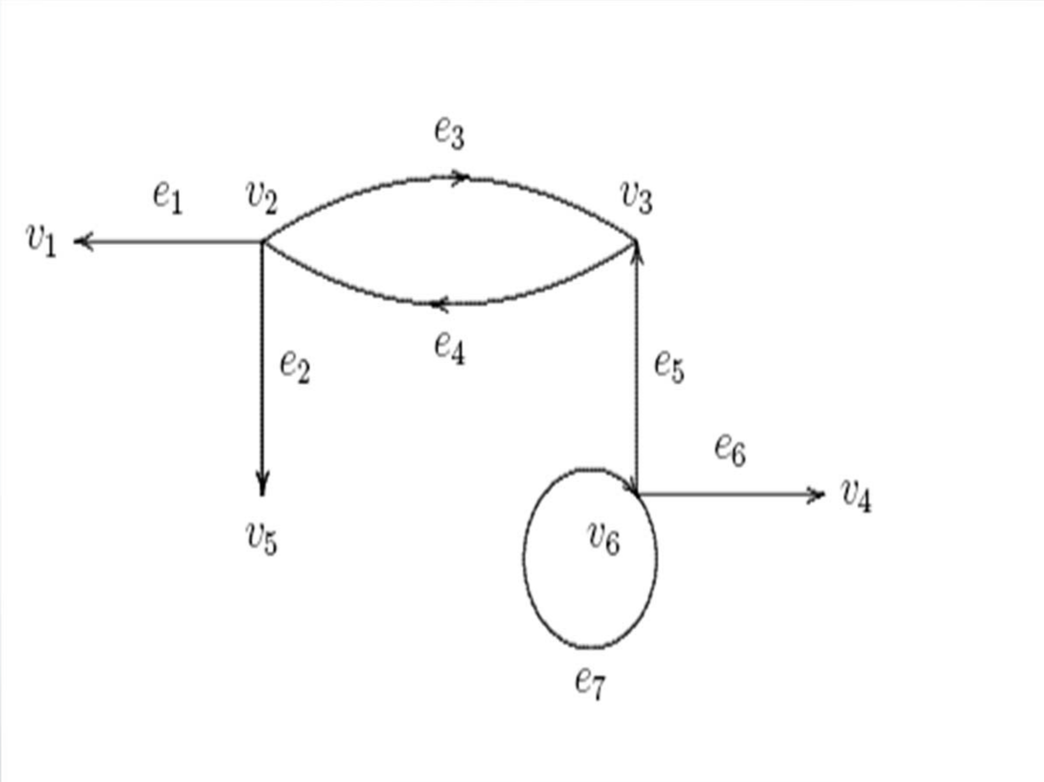
Chú ý

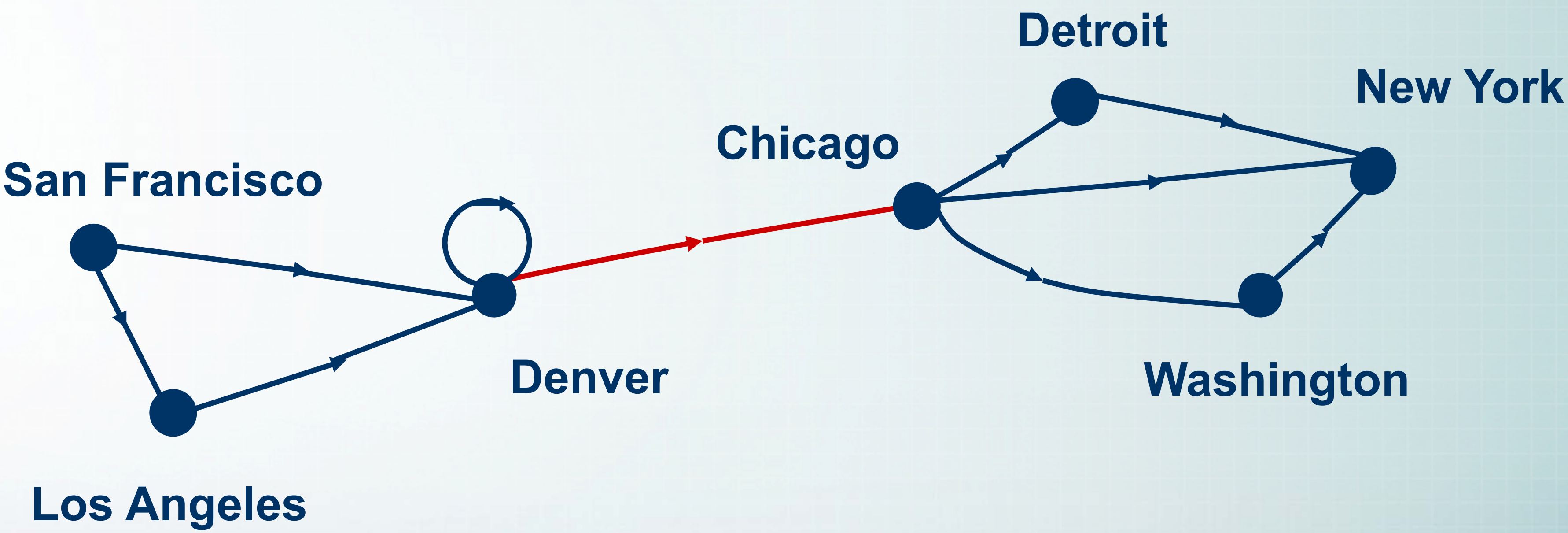
- Nếu uv là một cung thì ta nói:
  - Đỉnh u và v *kề nhau*.
  - Đỉnh u gọi là đỉnh *đầu (gốc)*, đỉnh v là đỉnh *cuối (ngọn)* của cung uv. Đỉnh v là đỉnh *sau* của đỉnh u.
- Hai cung có cùng gốc và ngọn gọi là cung *song song.*
- Cung có điểm gốc và ngọn trùng nhau gọi là *khuyên*.

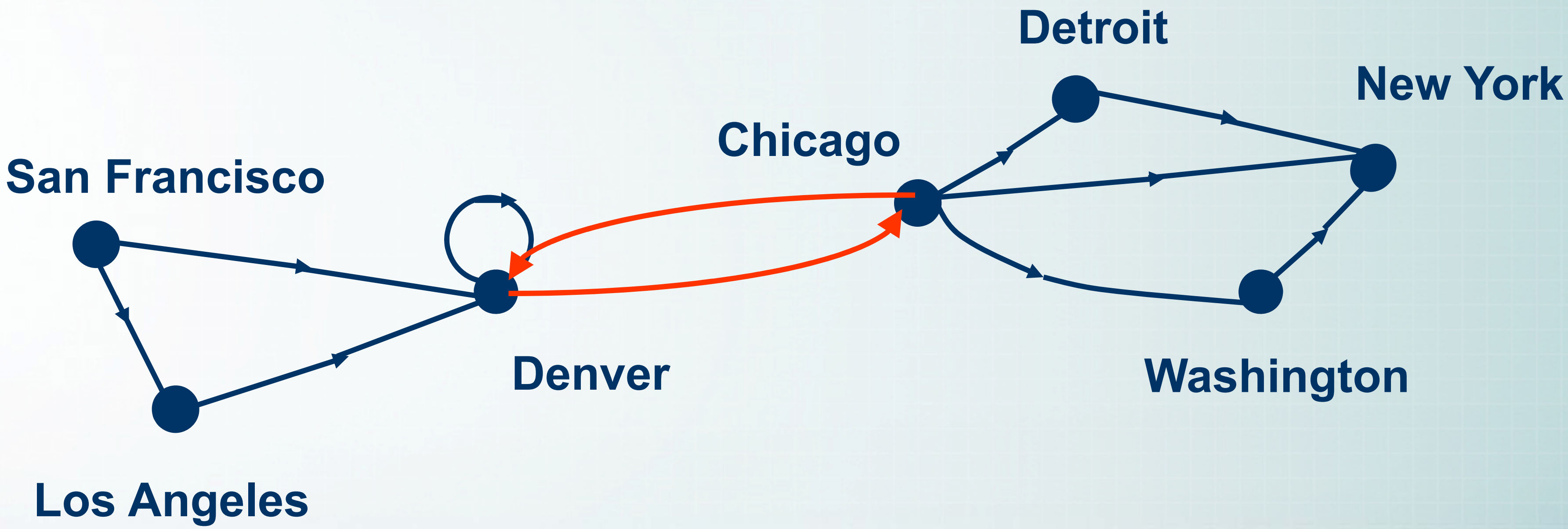

b
a
c

Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định nghĩa 6. Đa đồ thị có hướng không chứa các cạnh song song gọi là *đồ thị có hướng*




Detroit
New York
Chicago
San Francisco
Denver
Washington
Los Angeles


Detroit
New York
Chicago
San Francisco
Denver
Washington
Los Angeles

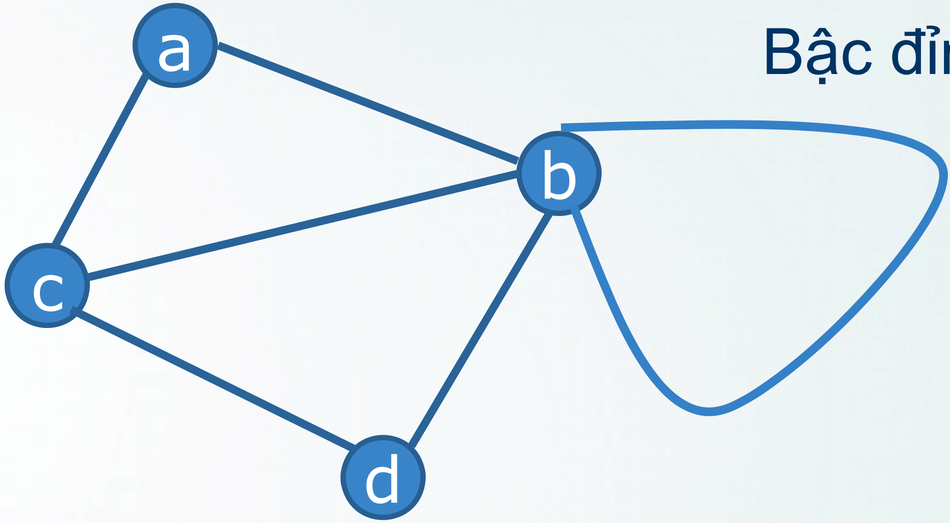
Những khái niệm và tính chất cơ bản

Bậc của đỉnh

- Cho đồ thị vô hướng G = (V,E). *Bậc* của đỉnh v, ký hiệu deg(v), là số cạnh kề với v, trong đó một khuyên tại một đỉnh được đếm hai lần cho bậc của đỉnh ấy.

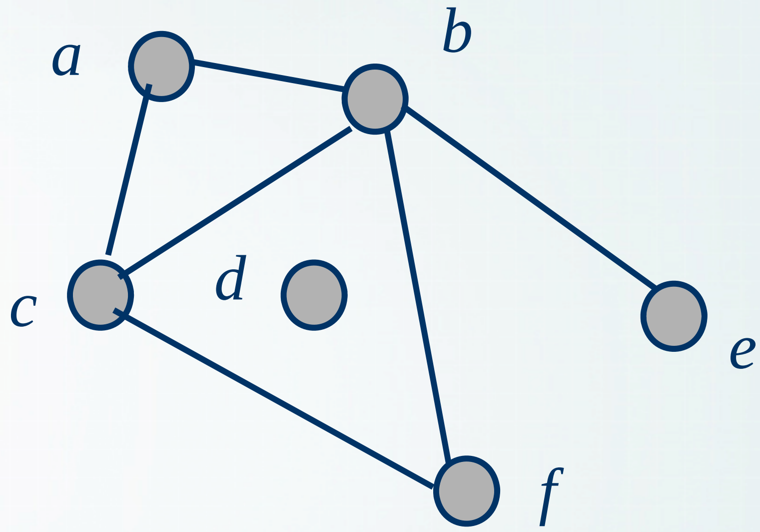
Bậc đỉnh a: **deg(a)** = 2

Bậc đỉnh b: **deg(b)** = 5



Bậc đỉnh c: **deg(c)** = 3

Bậc đỉnh d: **deg(d)** = 2



Bậc của các đỉnh?

1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

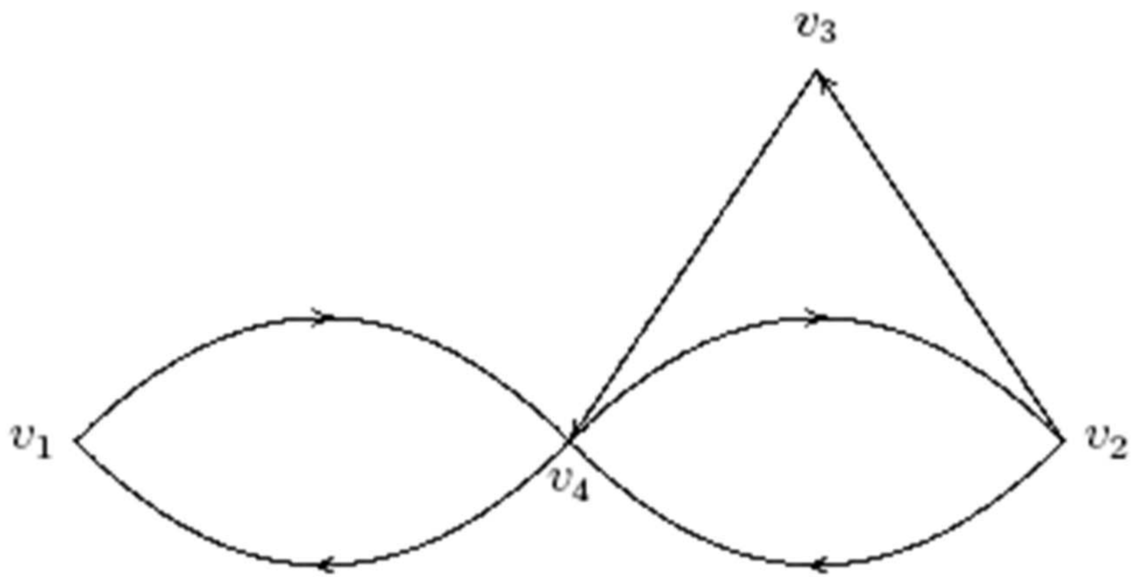
Cho đồ thị có hướng G = (V, E), $v \in V$

1) $deg^-(v)$:= số cung có đỉnh cuối là v, gọi là *bậc vào* của v.

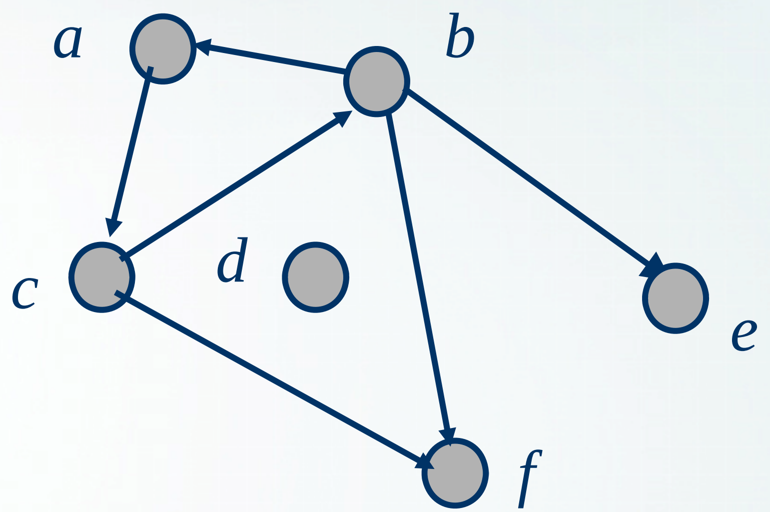
2) $deg^+(v)$:= số cung có đỉnh đầu là v,gọi là *bậc ra* của v

3) $deg(v) := deg^-(v) + deg^+(v)$

- Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 gọi là *đỉnh treo*



$$
\begin{aligned}
d^+(v_1) &= d^-(v_1) = 1, & d^+(v_2) &= 2, d^-(v_2) = 1, \\
d^+(v_3) &= d^-(v_3) = 1, & d^+(v_4) &= 2, d^-(v_4) = 3.
\end{aligned}
$$



Bậc đỉnh a: **deg⁻(a)=** 1 ; **deg⁺(a)=**1

Bậc đỉnh b: **deg⁻(b)=** 1 ; **deg⁺(b)=**3

Bậc đỉnh c: **deg⁻(c)=** 1 ; **deg⁺(c)=**2

Bậc đỉnh d: **deg⁻(d)=** 0 ; **deg⁺(d)=**0

Bậc đỉnh e: **deg⁻(e)=** 1 ; **deg⁺(e)=**0

Bậc đỉnh f: **deg⁻(f)=** 2 ; **deg⁺(f)=**0

1. Những khái niệm và tính chất cơ bản

Định lí

Cho đồ thị G = (V,E), m là số cạnh (cung)

1) $$\boxed{2m = \sum_{v \in V} \deg(v)}$$

2) Nếu G có hướng thì:

$$\boxed{m = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{+}(v)}$$

3) Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là số chẵn

2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

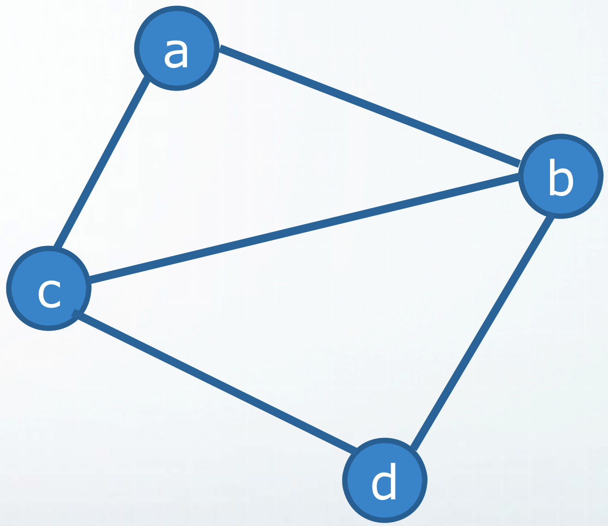
Ta sử dụng ma trận kề.

Cho G = (V,E) với V={1,2,…,n}.
Ma trận kề của G là ma trận $A = (a_{ij})_n$ xác định như sau:

a_{ij} = số cạnh (số cung) đi từ đỉnh i đến đỉnh j

2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

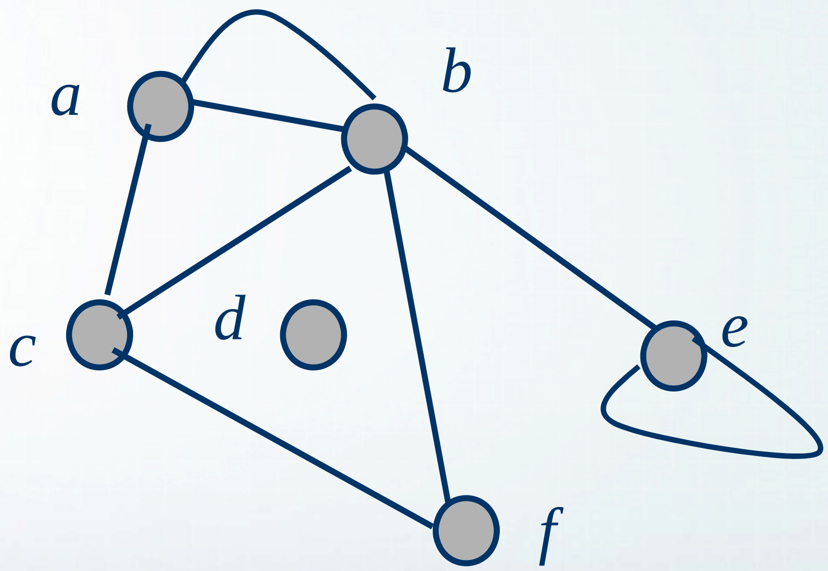
Tìm ma trận kề



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} &
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

2. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

Tìm ma trận kề



$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
\hline
a & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
b & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
c & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
f & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

3. Đẳng cấu

Định nghĩa

Cho hai đơn đồ thị G = (V,E) và G'= (V',E'). Ta nói rằng G *đẳng cấu* G', ký hiệu G $\cong$ G', nếu tồn tại song ánh f :V$\rightarrow$ V'sao cho:

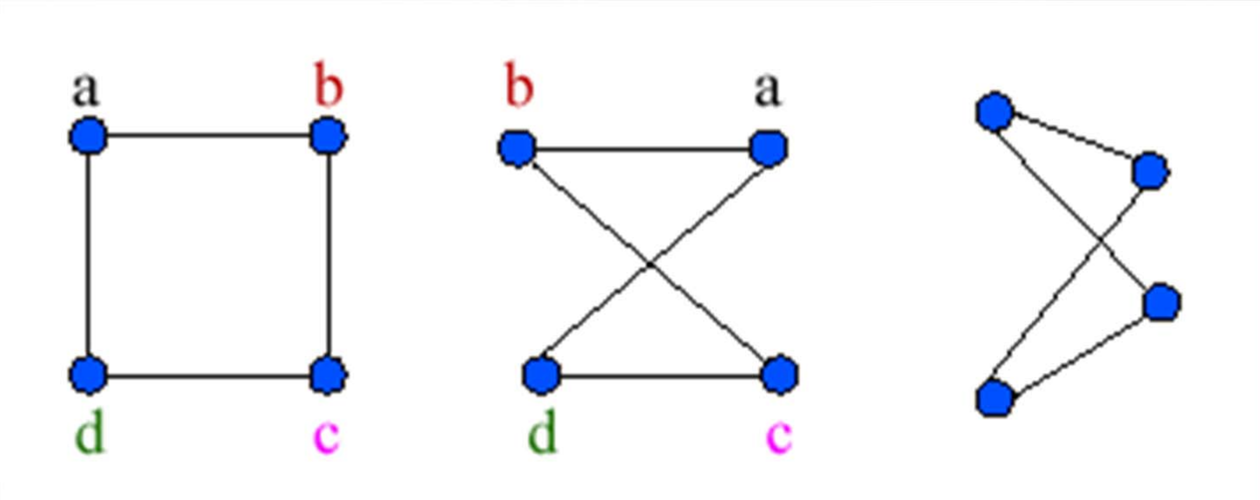
uv là cạnh của G $\Leftrightarrow$ f(u)f(v) là cạnh của G'

3. Đẳng cấu

Chú ý

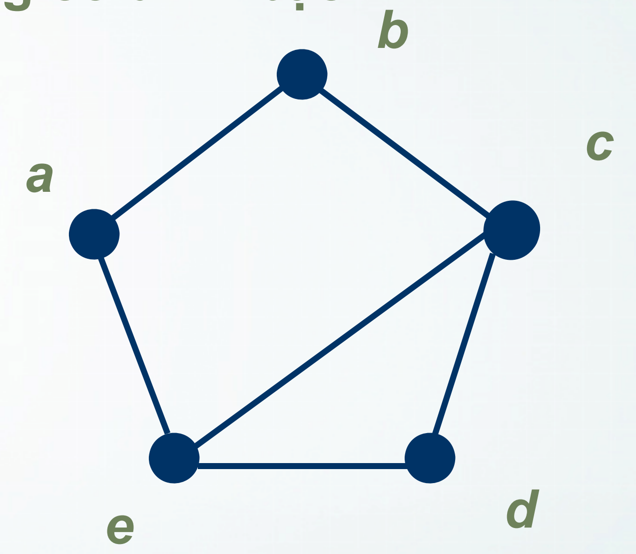
- Nếu G và G' là các đơn đồ thị vô hướng đẳng cấu qua ánh xạ f thì chúng có:
  - Cùng số đỉnh
  - Cùng số cạnh
  - Cùng số đỉnh với bậc cho sẵn (vd: số đỉnh bậc 2 của G và G' bằng nhau)
  - deg v = deg f(v)

3. Đẳng cấu

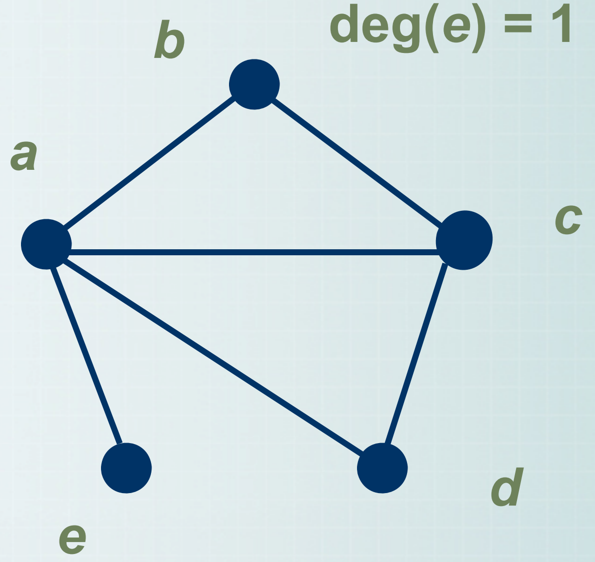


Ví dụ

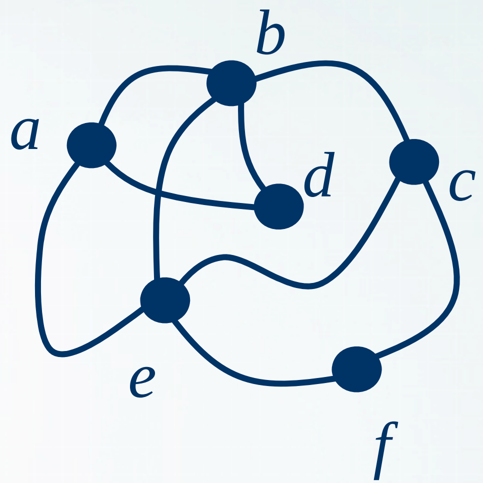
Không có đỉnh bậc 1

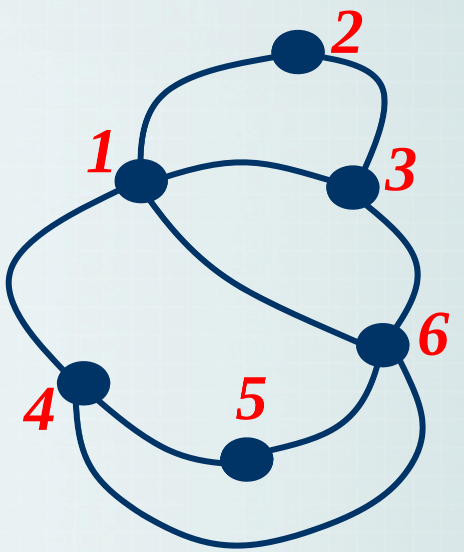


deg(e) = 1

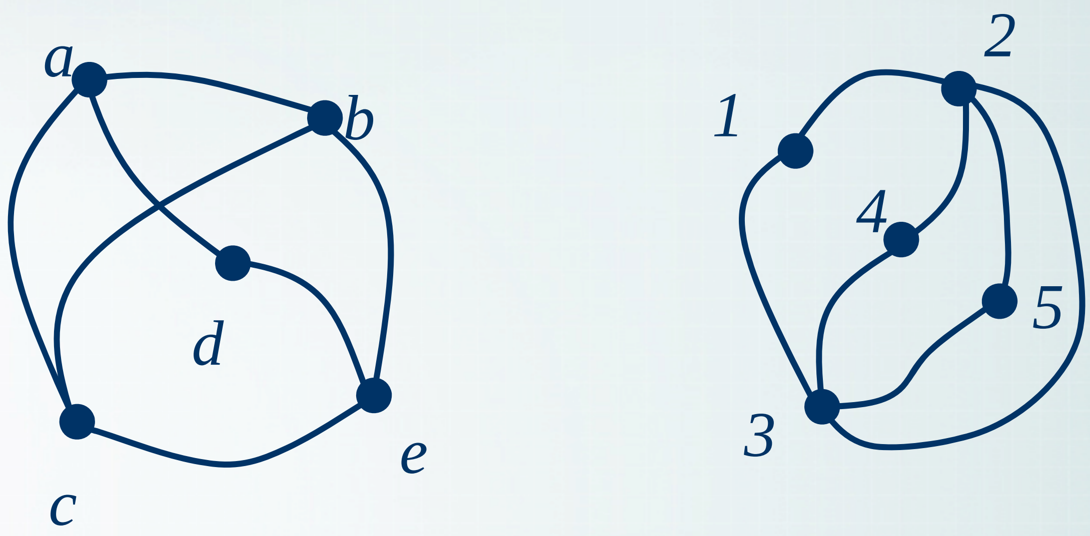


Không đẳng cấu



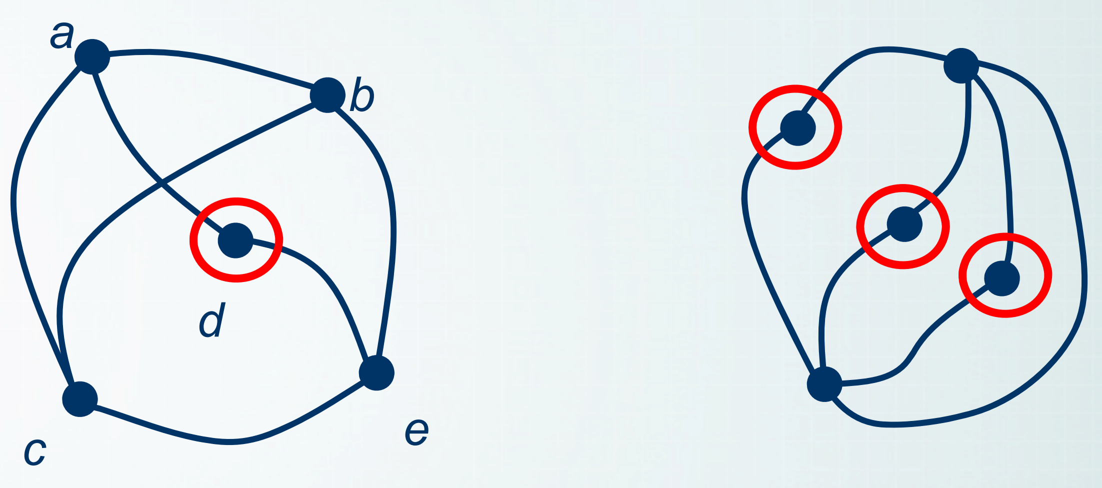


Đẳng cấu



Không đẳng cấu

Đẳng cấu không?



4. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

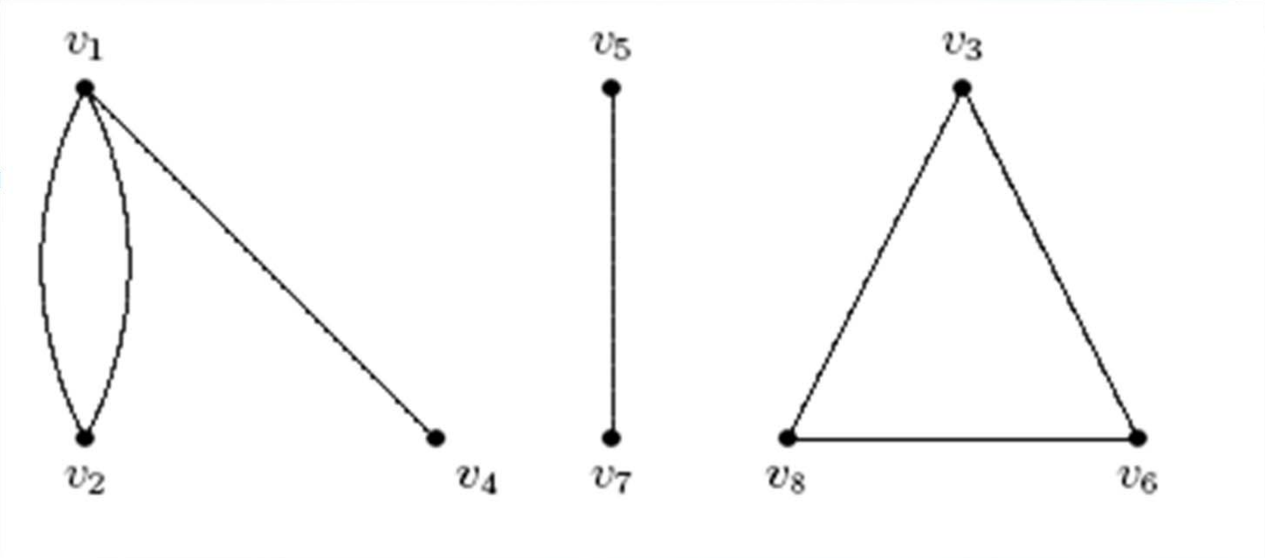
Định nghĩa. Cho đồ thị vô hướng G = (V,E). Trên V ta định nghĩa quan hệ tương đương như sau:

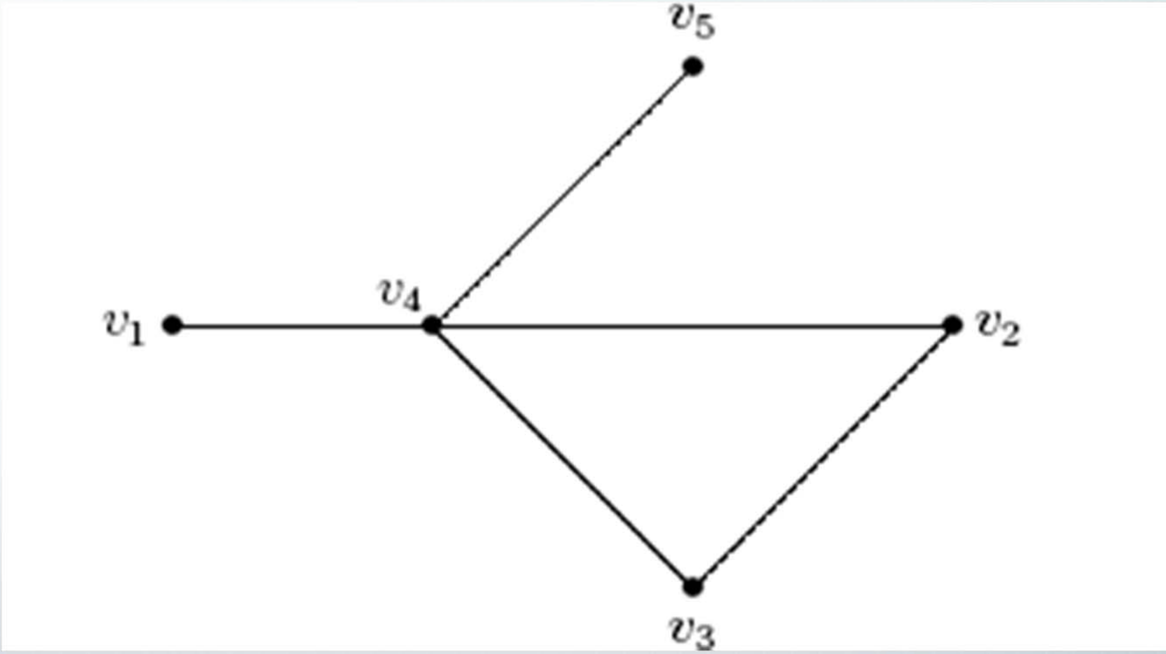
u~v ⇔ u ≡ v hay có một đường đi từ u đến v

a) Nếu u~v thì ta nói hai đỉnh u và v *liên thông* với nhau

b) Mỗi lớp tương đương được gọi là một *thành phần liên thông* của G

c) Nếu G chỉ có một thành phần liên thông thì G gọi là *liên thông*


v_1
v_5
v_3
v_2
v_4
v_7
v_8
v_6

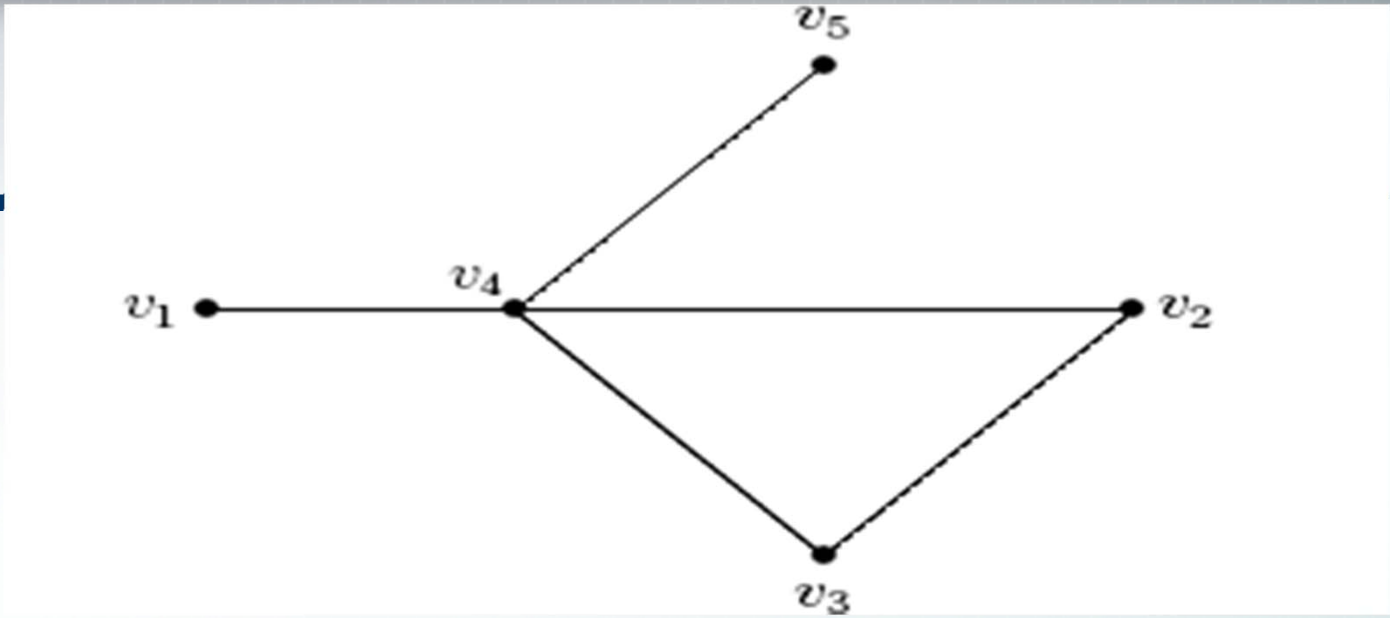

v_5
v_4
v_1
v_2
v_3

4. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

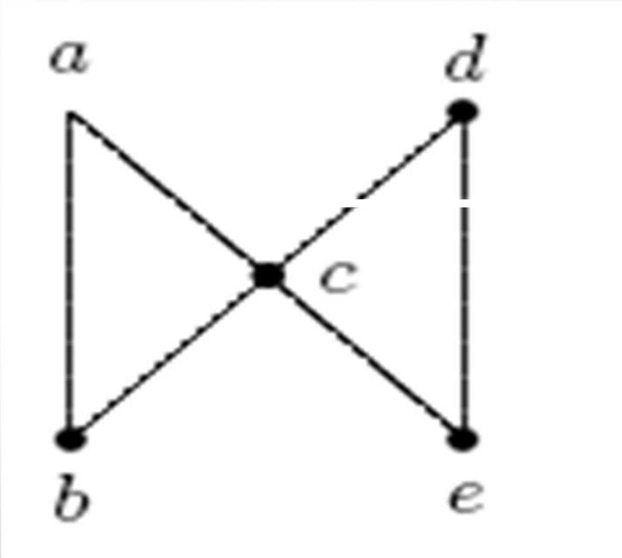
Định nghĩa. Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông

a) Đỉnh v được gọi là *đỉnh khớp* nếu G – v không liên thông (G – v là đồ thị con của G có được bằng cách xoá v và các cạnh kề với v)

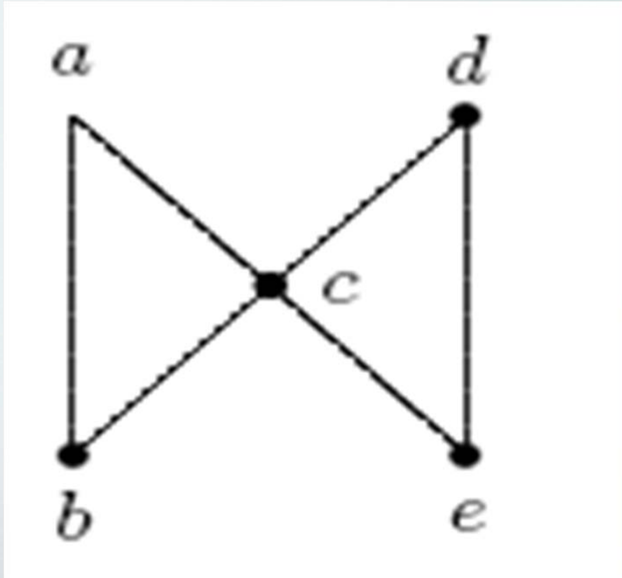
b) Cạnh e được gọi là *cầu* nếu G- e không liên thông (G-e là đồ thị con của G có được bằng cách xoá cạnh e).



v_5
v_4
v_1
v_2
v_3



a
d
c
b
e



a
d
c
b
e

4. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng $u,v \in V$

a) Đường đi (dây chuyền) có chiều dài k nối hai đỉnh u,v là dãy đỉnh và cạnh liên tiếp nhau

$v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ sao cho:

$$v_0 = u, v_k = v, e_i = v_{i-1} v_i, \quad i = 1,2,\ldots,k$$

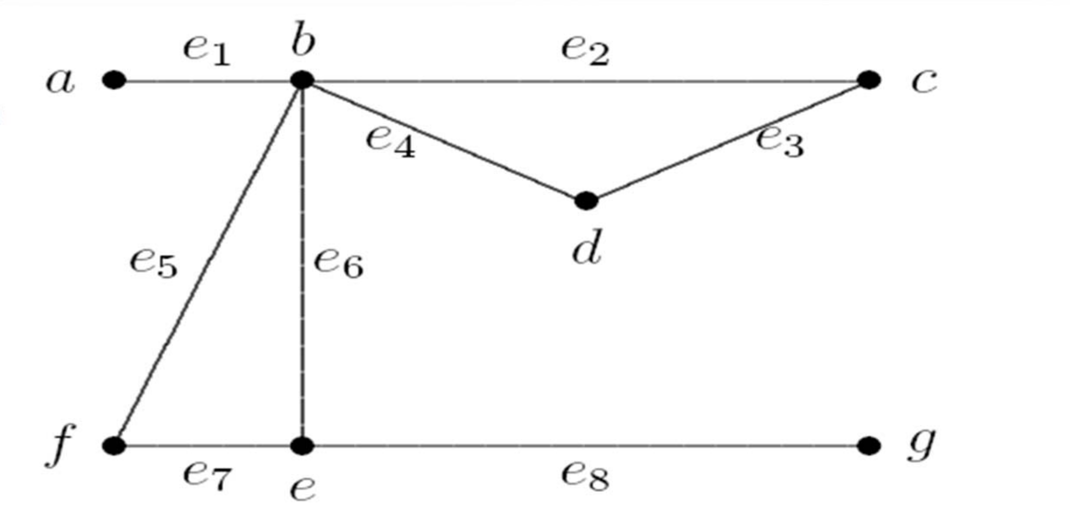
4. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông:

a) Đường đi không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi đơn*

b) Đường đi không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần gọi là *đường đi sơ cấp*

c) Đường đi được gọi là *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh

d) Đường đi được gọi là *chu trình sơ cấp* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh và không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần



Chu trình sơ cấp nào không?

(a,e_1,b,e_2,c,e_3,d,e_4,b) là đường đi từ đỉnh a tới đỉnh b có chiều dài là 4.

Tuy nhiên, trong trường hợp này, đồ thị của chúng ta là đơn đồ thị, do vậy có thể gọi đường đi này bằng 1 cách ngắn gọn như sau: (a,b,c,d,b)

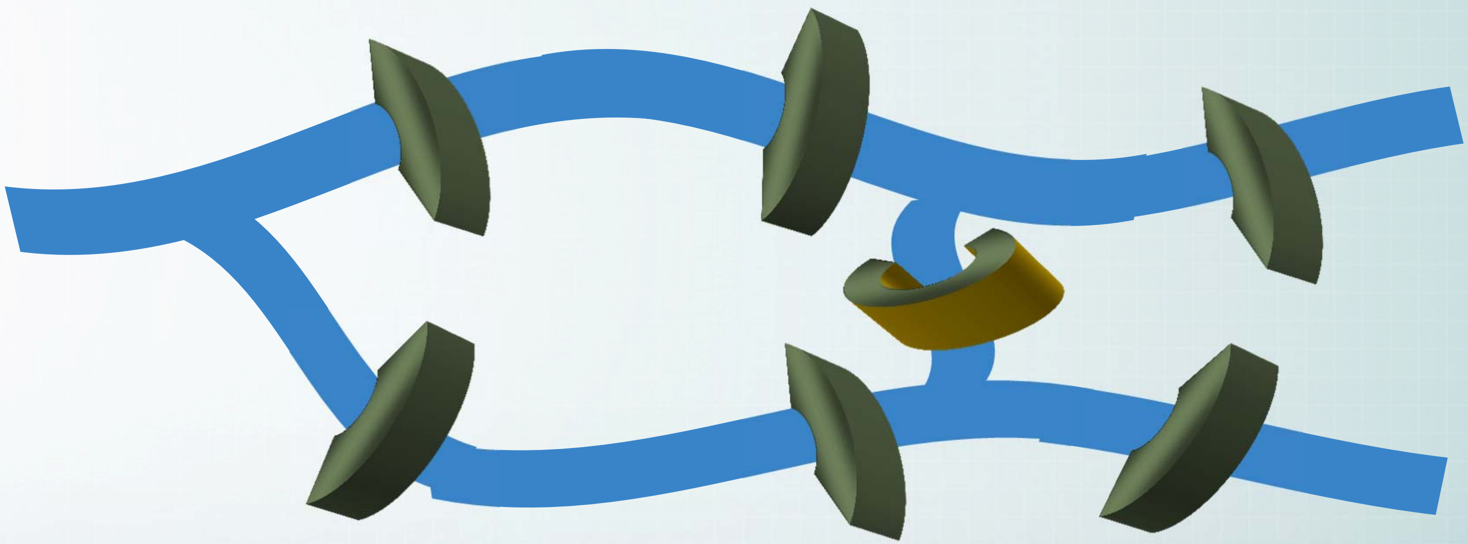
Chu trình sơ cấp: (b,c,d,b) (b,f,e,b)

Đường đi Euler

Euler

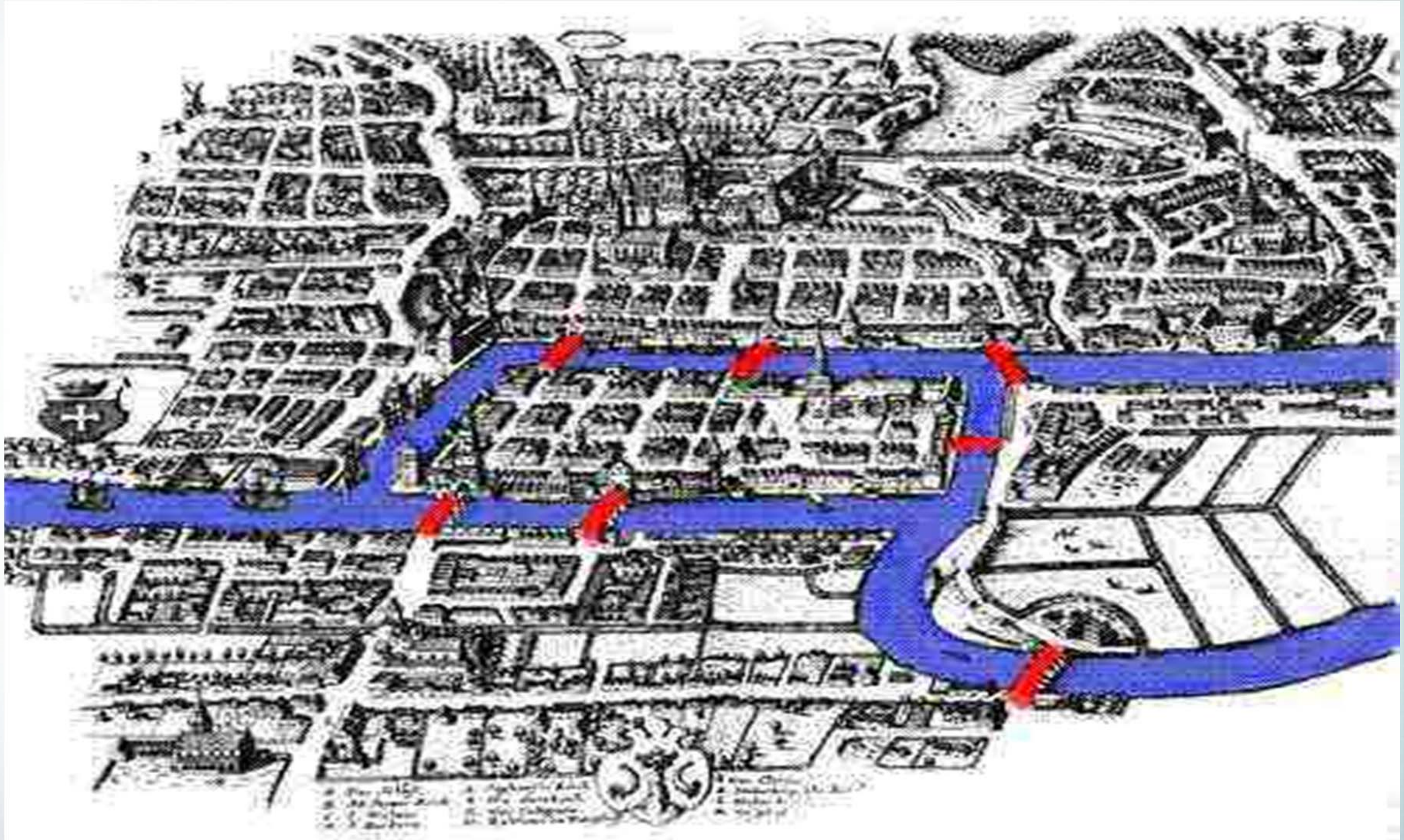
Đường đi Euler

Bài toán. Thị trấn Königsberg chia thành 4 phần bởi các nhánh của dòng sông Pregel

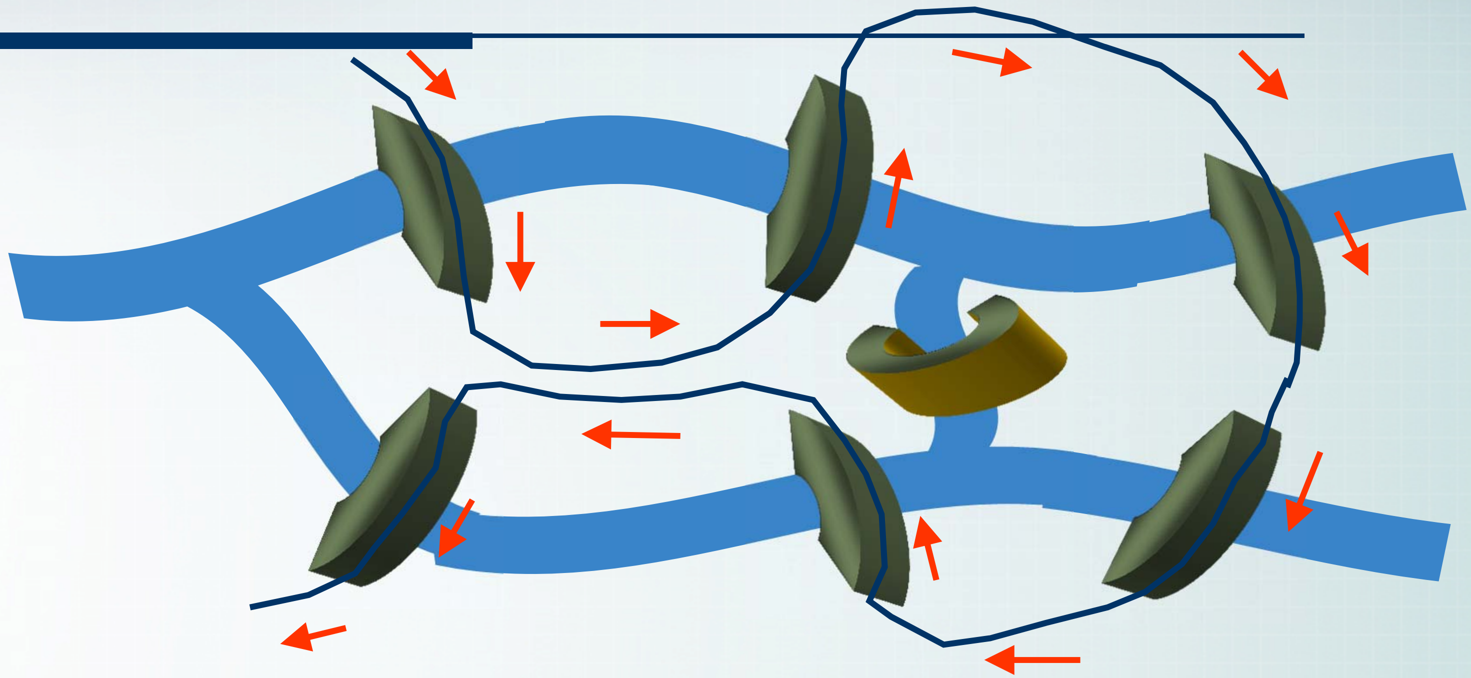


Bốn phần này được nối kết bởi 7 cây cầu

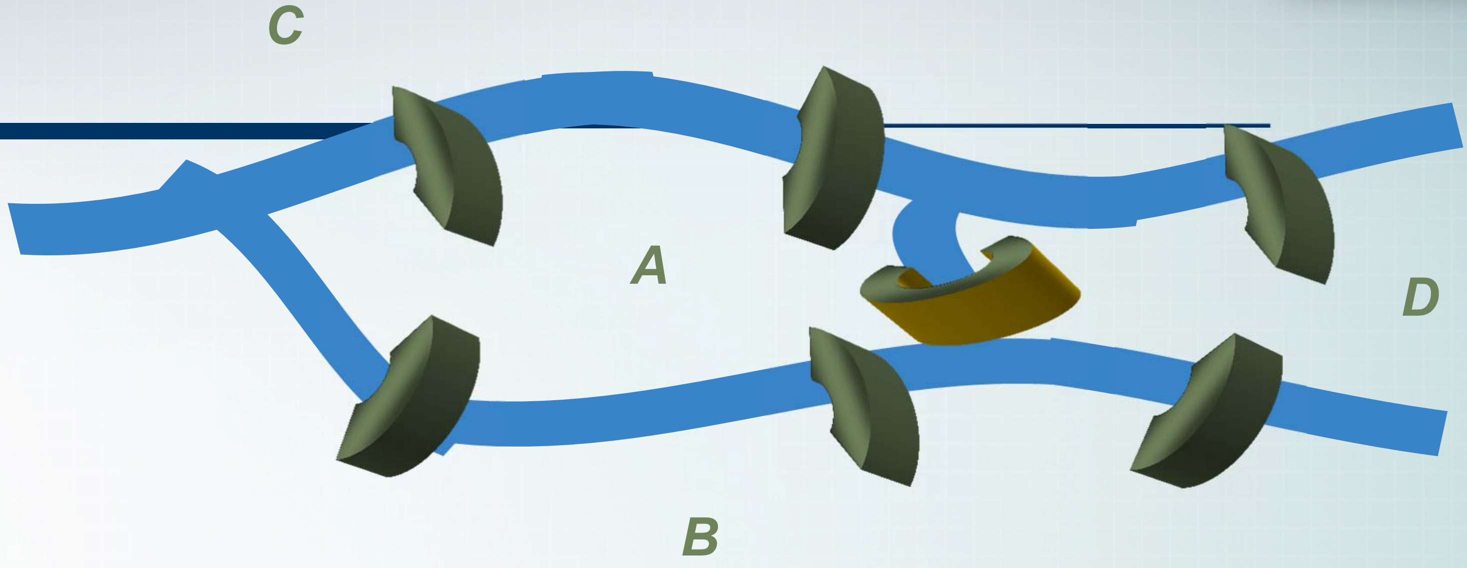
Đường đi Euler

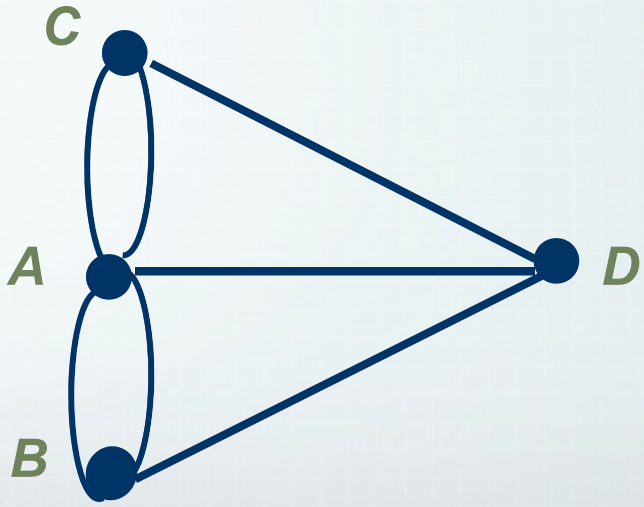


Đường đi Euler



Câu hỏi. Có thể đi qua bảy cây cầu mà không có cây cầu nào đi quá 1 lần


C
A
D
B


C
A
D
B

Đường đi Euler

Định nghĩa.

1. Đường đi Euler là đường đi qua tất cả các cạnh mỗi cạnh (cung) đúng một lần. *Chu trình Euler là* chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị mỗi cạnh đúng một lần.

2. Đồ thị được gọi là *đồ thị Euler* nếu nó có chu trình Euler

Đường đi Euler

Điều kiện cần và đủ.

Cho G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông. G là đồ thị Euler ⇔ Mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Nếu G có hai đỉnh bậc lẻ còn mọi đỉnh khác đều có bậc chẵn thì G có đường đi Euler

Nhận xét.

- Nếu đồ thị G có 2 đỉnh bậc lẻ thì G có 1 đường đi Euler
- Nếu đồ thị G có 2k đỉnh bậc lẻ thì ta có thể vẽ đồ thị bằng k nét

Đường đi Euler

Thuật toán Fleury để tìm chu trình Euler.

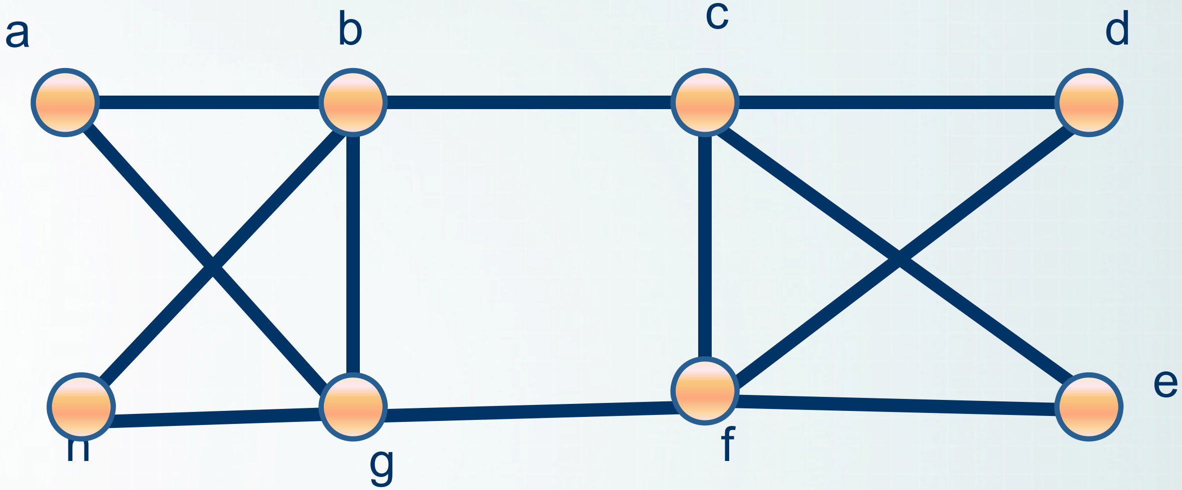
Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của G và tuân theo

qui tắc sau:

1. Mỗi khi đi qua một cạnh nào đó thì xoá nó đi, sau đó xoá đỉnh cô lập nếu có.

2. Không bao giờ đi qua một cầu trừ phi không còn cách đi nào khác.

Đường đi Euler



abcfdcefghbga

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

1. Đồ thị G = (V,E) gọi là đồ thị có *trọng số* (hay chiều dài, trọng lượng) nếu mỗi cạnh(cung) e được gán với một số thực w(e).Ta gọi w(e) là *trọng lượng* của e.
2. *Độ dài* của đường đi từ u đến v bằng tổng độ dài các cạnh mà đường đi qua
3. *Khoảng cách* giữa 2 đỉnh u,v là độ dài ngắn nhất của các đường đi từ u đến v.

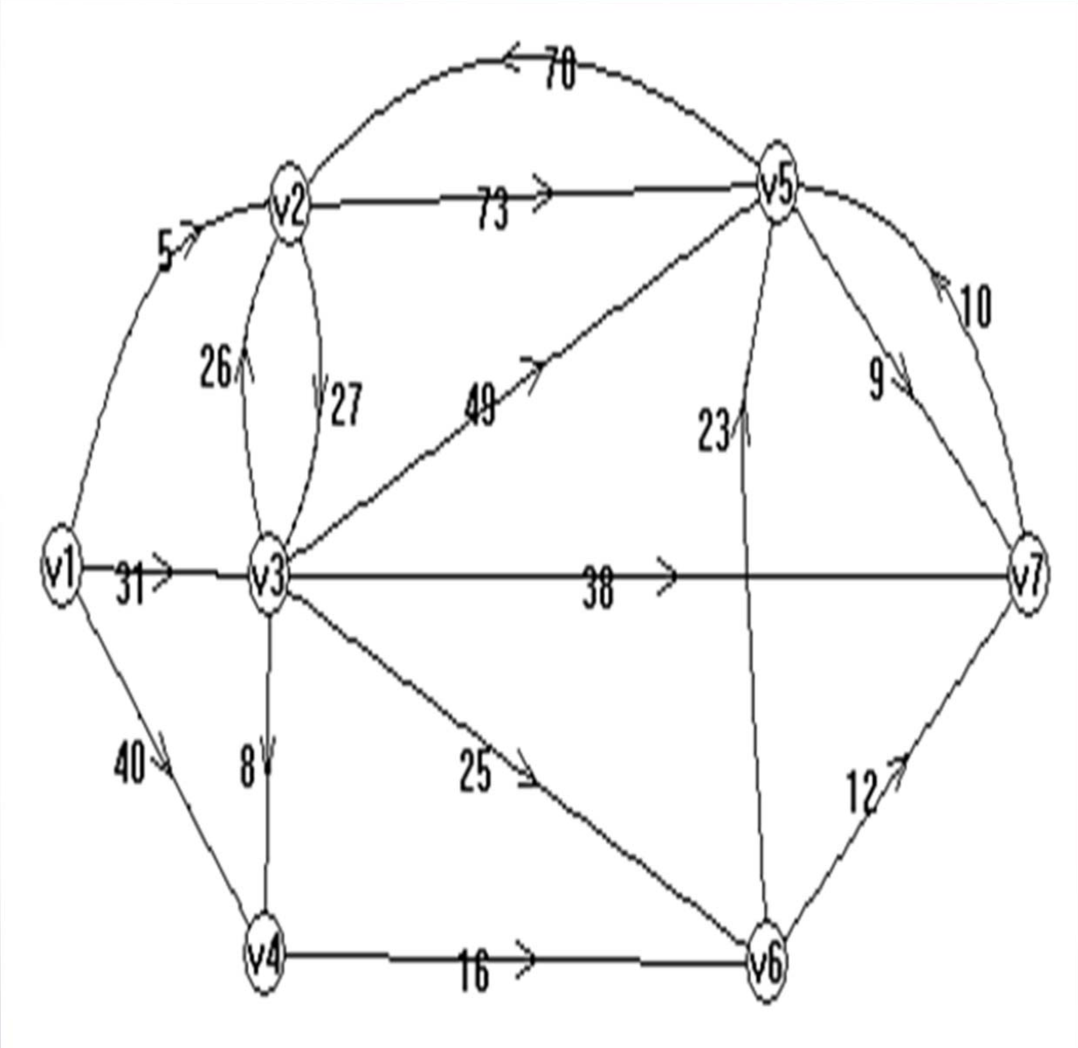
Bài toán đường đi ngắn nhất

Ma trận khoảng cách (trọng số)

Cho G = (V, E), V = {$v_1, v_2, \ldots, v_n$} là đơn đồ thị có trọng số. Ma trận khoảng cách của G là ma trận D= (d_{ij}) xác định như sau:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & khi\ i = j \\ w(v_i v_j) & khi\ v_i v_j \in E \\ \infty & khi\ v_i v_j \notin E \end{cases}$$

Bài toán đường đi ngắn nhất



$$D=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Bài toán đường đi ngắn nhất

Các thuật toán tìm đường đi ngắn nhất

- Vét cạn
- Dijkstra
- Ford – Bellman
- Floyd

Thuật toán Dijkstra

Bài toán.

Cho G = (V, E) đơn, liên thông, có trọng số dương (w(uv) > 0 với mọi u khác v). Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến v và tính khoảng cách $d(u_0,v)$.

Bài toán đường đi ngắn nhất

Phương pháp

Xác định tuần tự các đỉnh có khoảng cách đến u_0 từ nhỏ đến lớn.

1. Trước tiên đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất đến u_0 là u_0.
2. Trong $V\setminus\{u_0\}$ tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0) giả sử đó là u_1

Bài toán đường đi ngắn nhất

3. Trong $V\setminus\{u_0,u_1\}$ tìm đỉnh có khoảng cách đến u_0 nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với u_0 hoặc u_1) giả sử đó là u_2
4. Tiếp tục như trên cho đến bao giờ tìm được khoảng cách từ u_0 đến mọi đỉnh .

Nếu G có n đỉnh thì:

$$0 = d(u_0,u_0) < d(u_0,u_1) \leq d(u_0,u_2) \leq \ldots \leq d(u_0,u_{n-1})$$

Thuật toán Dijkstra

Bước1. i:=0, S:=V\{u_0}, L(u_0):=0, L(v):= ∞ với mọi v ∈S và đánh dấu đỉnh v bởi (∞,-). Nếu n=1 thì xuất d(u_0,u_0)=0=L(u_0)

Bước 2. Với mọi v ∈S và kề với u_i (nếu đồ thị có hướng thì v là đỉnh sau của u_i), đặt L(v):=min{L(v),L(u_i)+w(u_i v)}.

Xác định k =minL(v) ,v∈S.

Nếu k=L(v_j) thì xuất d(u_0,v_j)=k và đánh dấu v_j bởi (L(v_j);u_i). u_{i+1}:=v_j S:=S\{u_{i+1}}

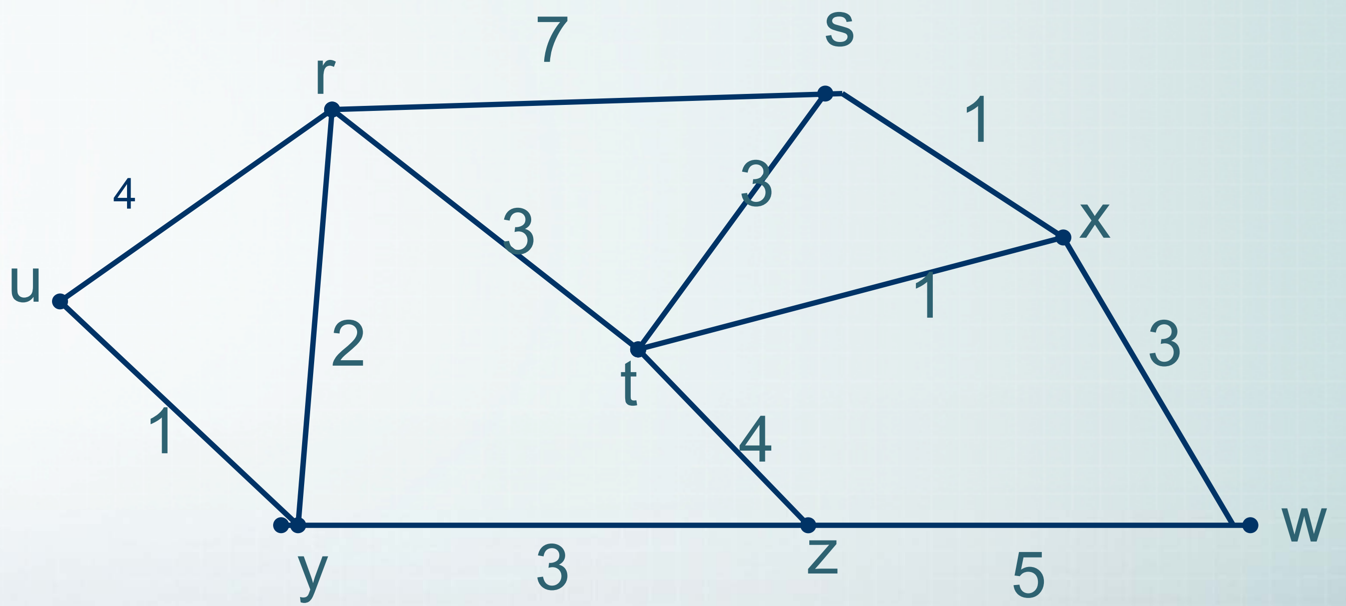
Bước3. i:=i+1

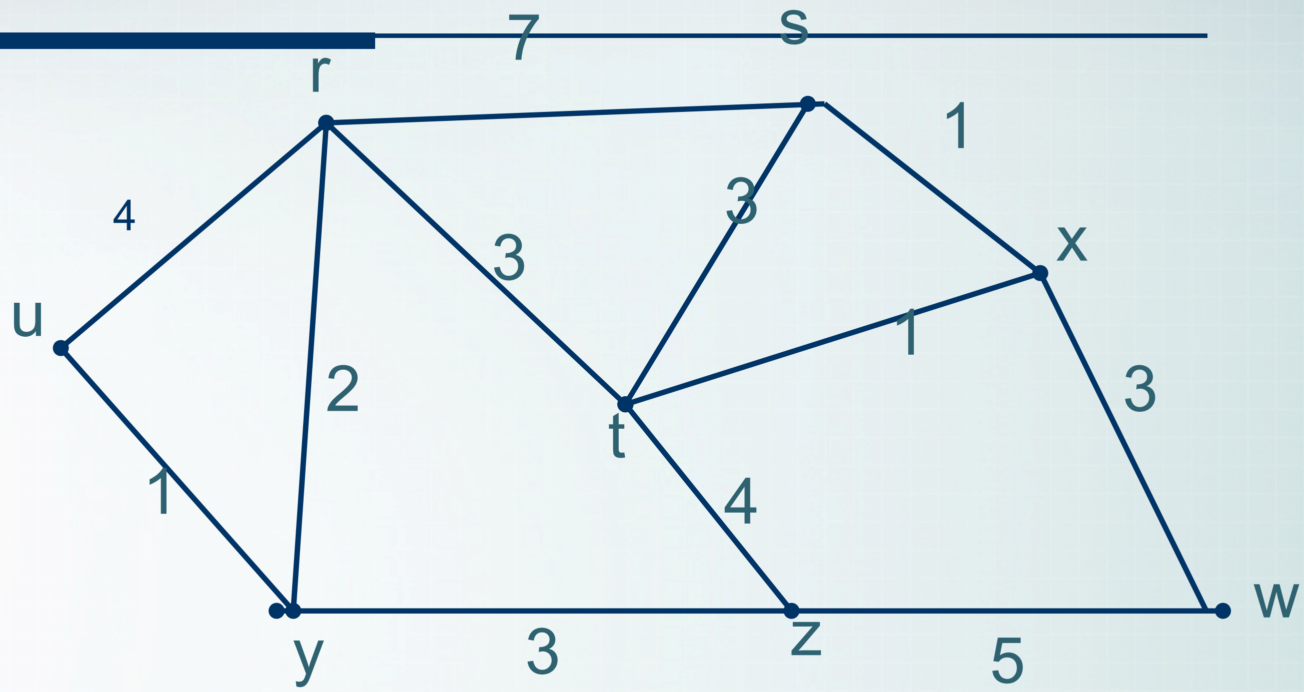
Nếu i = n-1 thì kết thúc

Nếu không thì quay lại Bước 2

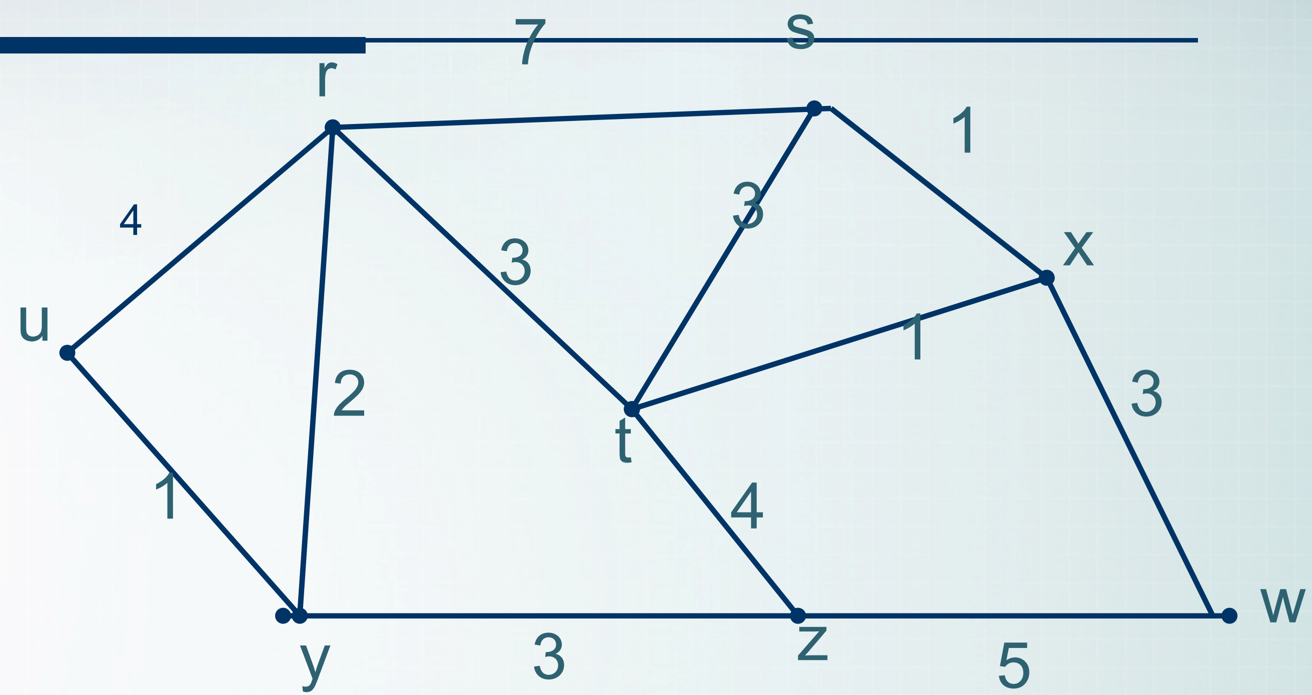
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bài tập 1. Tìm đường đi ngắn nhất từ u đến các đỉnh còn lại

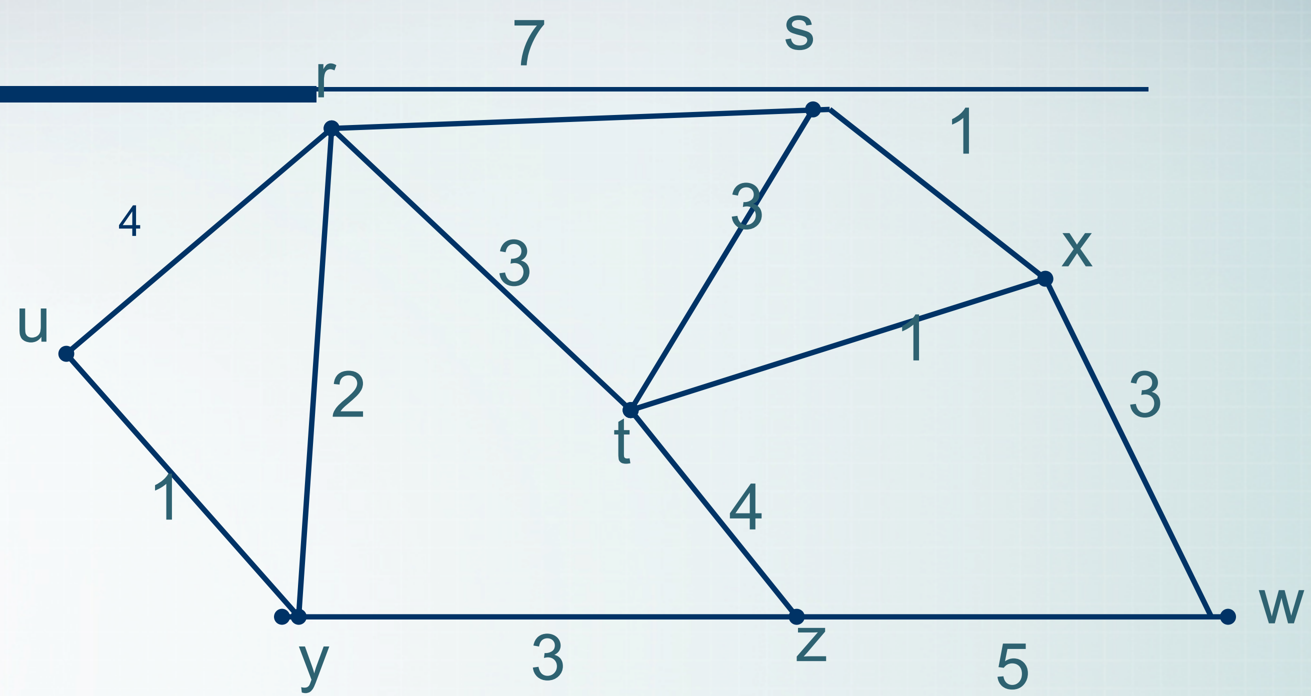




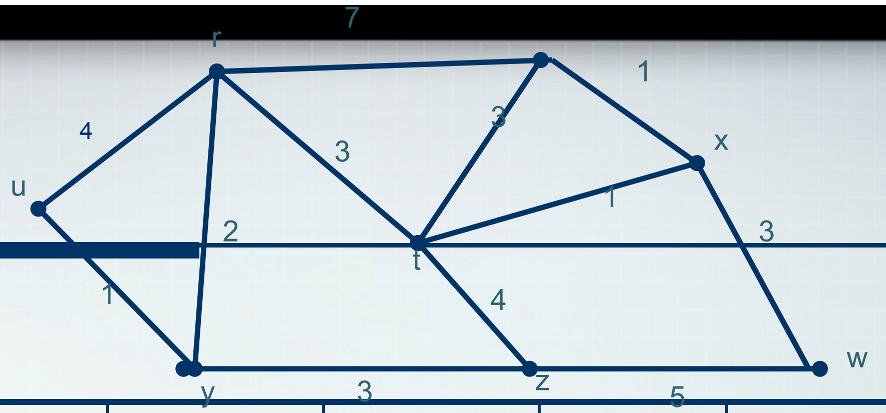
u	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)



u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	$(4,u_0)$	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	$(1,u_0)^*$	(∞,-)	(∞,-)



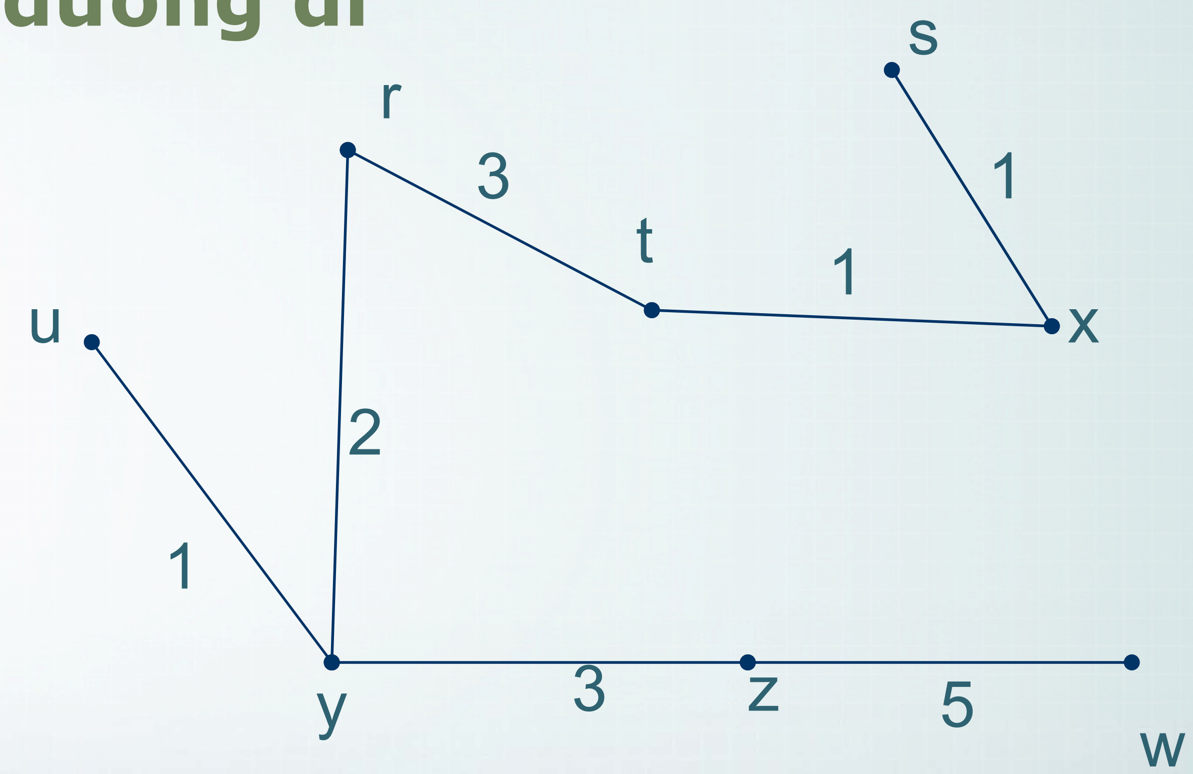
u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	(4,u_0)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(1u_0)*	(∞,-)	(∞,-)
-	(3,y)*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)



u_0	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	$(4,u_0)$	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	$(1u_0)^*$	(∞,-)	(∞,-)
-	(3,y)*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)	(∞,-)	-	(4,y)*	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)*	(∞,-)	-	-	(9,z)
-	-	(9,t)	-	(7,t)*	-	-	(9,z)
-	-	(8,x)*	-	-	-	-	(9,z)
-	-	-	-	-	-	-	(9,z)*

Bài toán đường đi ngắn nhất

Cây đường đi



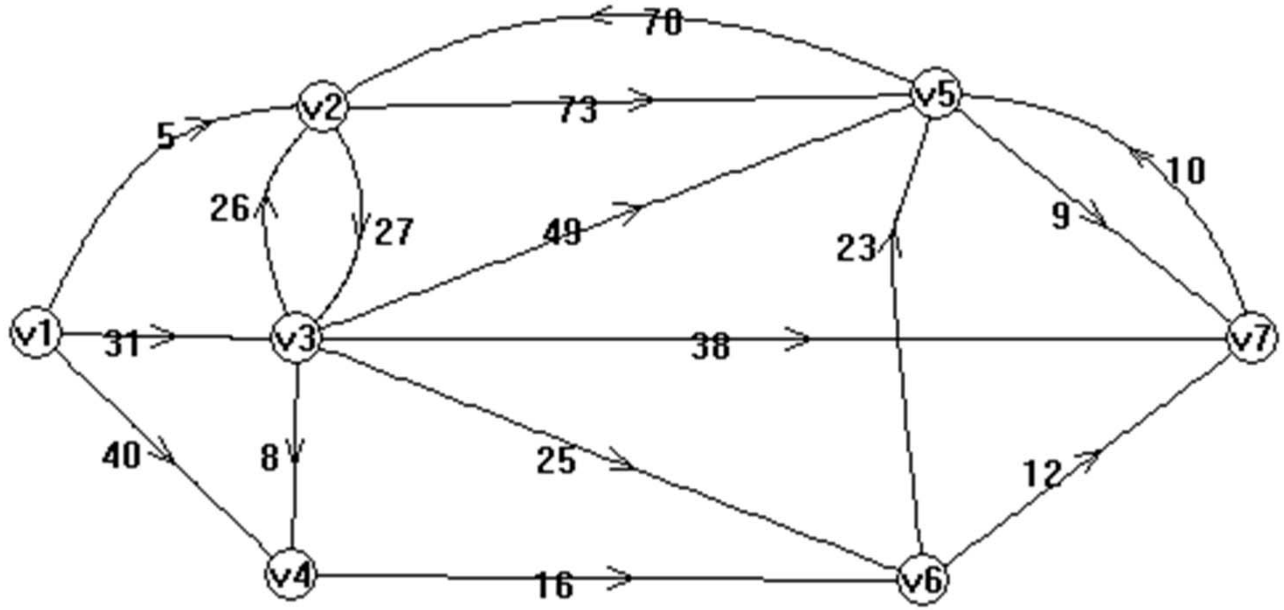
Bài toán đường đi ngắn nhất

Cho đồ thị có trọng số G = (V, E) ,
V = { v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 , v_7} xác định bởi ma trận trọng số D. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ v_1 đến các đỉnh v_2,v_3,v_4, v_5, v_6,v_7

Bài toán đường đi ngắn nhất

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

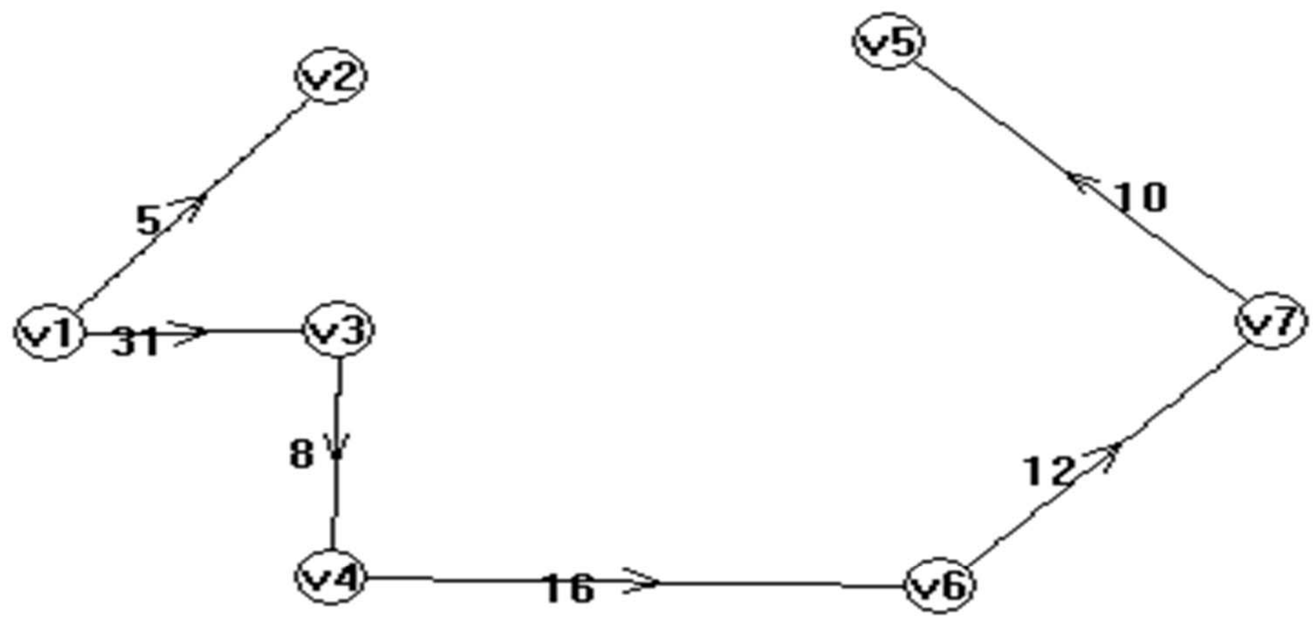
Bài toán đường đi ngắn nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

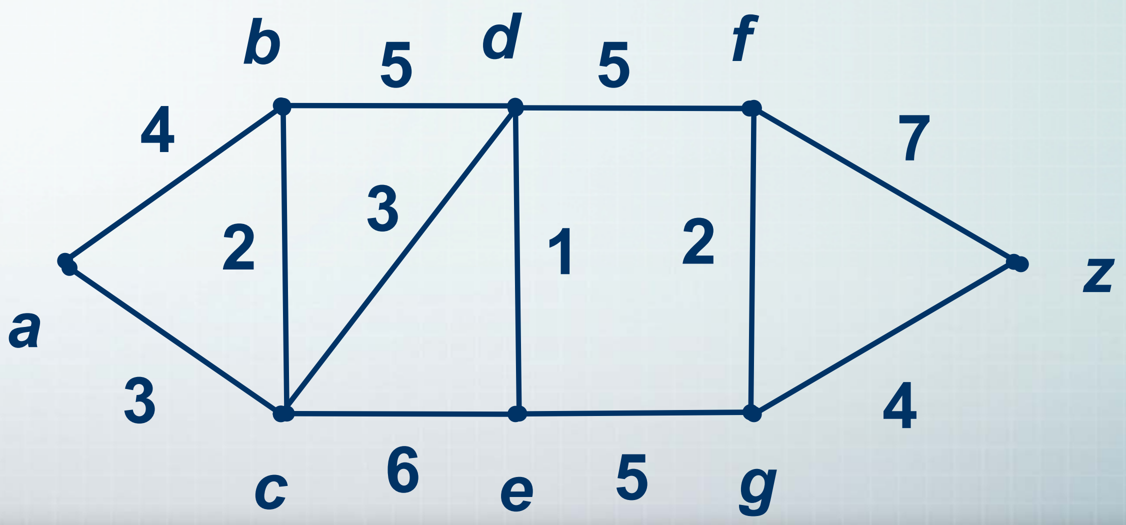
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0*	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	$(5,v_1)^*$	$(31,v_1)$	$(40,v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	$(31,v_1)^*$	$(40,v_1)$	$(78,v_2)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	-	$(39,v_3)^*$	$(78,v_2)$	$(56,v_3)$	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	$(55,v_4)^*$	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	-	$(67,v_6)^*$
-	-	-	-	$(77,v_7)$	-	-

Bài toán đường đi ngắn nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

Dùng thuật toán Dijsktra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a đến đỉnh z và chiều dài của nó trong đồ thị vô hướng có trọng lượng sau:*



a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*z*
0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	(4.*a*)	(3.*a*)*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	(4.*a*)*	-	(6.*c*)	(9.*c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	-	-	(6.*c*)*	(9.*c*)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
0	-	-	-	(7.*d*)*	(11.*d*)	(∞,-)	(∞,-)
0	-	-	-	-	(11.*d*)*	(12,*e*)	(∞,-)
0	-	-	-	-	-	(12,*e*)*	(18,*f*)
0	-	-	-	-	-	-	(16,*g*)

Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Ford – Bellman

Tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến các đỉnh hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm.

Bước 1. $L_0(u_0)$ =0 và $L_0(v) = \infty$ $\forall v \neq u_0$. Đánh dấu đỉnh v bằng (∞ ,-) ; k=1.

Bước 2. $L_k(u_0) = 0$ và

$L_k(v) = \min\{L_{k-1}(u)+w(uv)/u$ là đỉnh trước của $v\}$

Nếu $L_k(v)=L_{k-1}(y)+w(yv)$thì đánh dấu đỉnh v bởi $(L_k(v),y)$

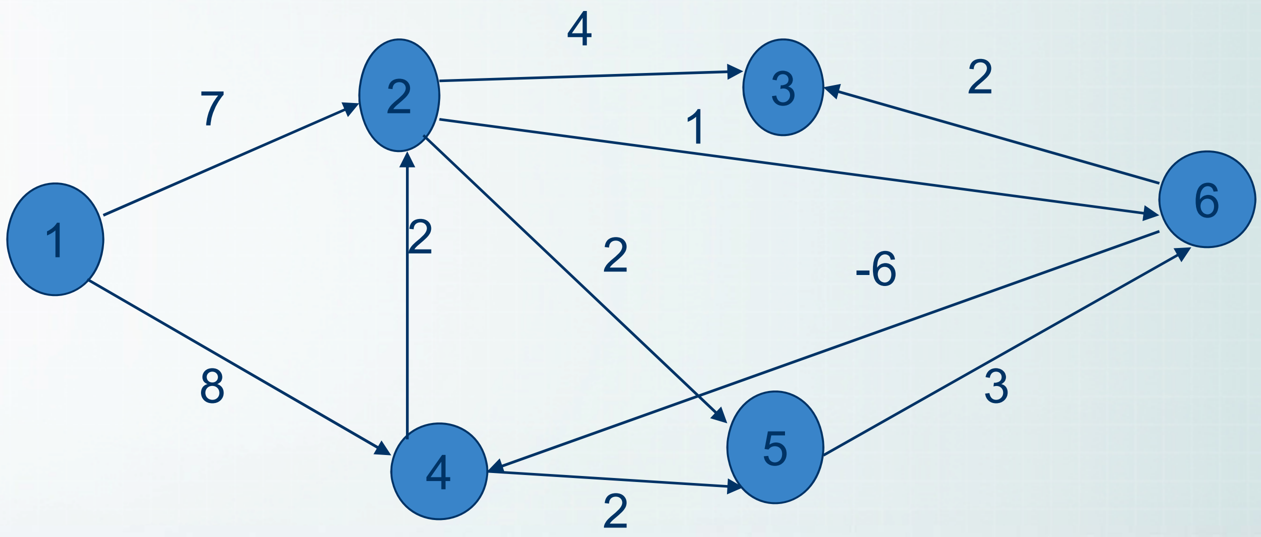
Bài toán đường đi ngắn nhất

Bước 3. Nếu $L_k(v) = L_{k-1}(v)$ với mọi v, tức $L_k(v)$ ổn định thì dừng. Ngược lại đến bước 4.

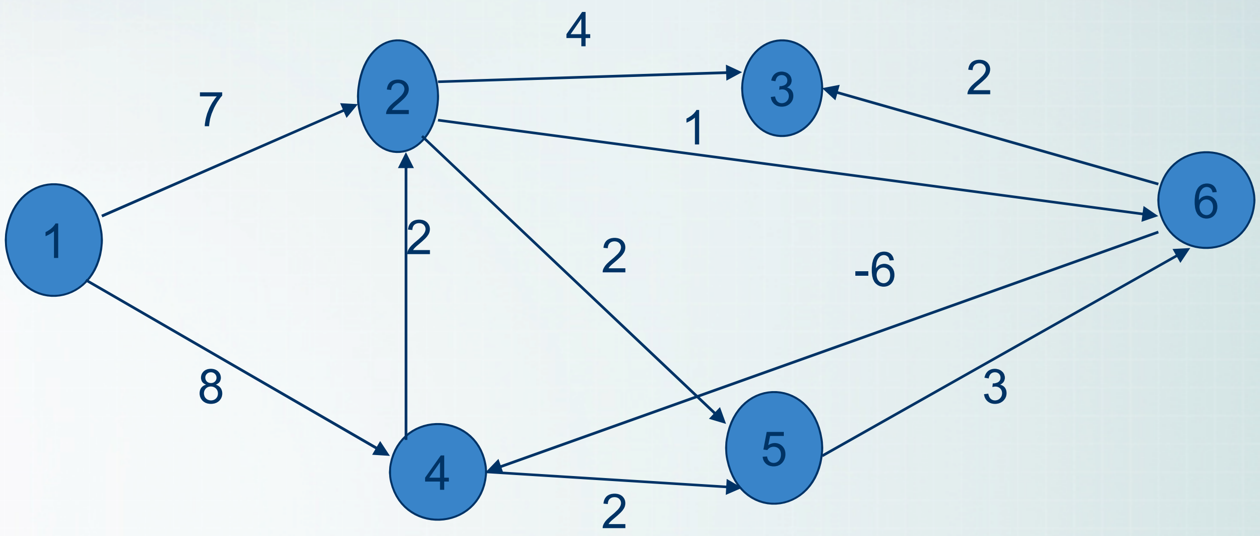
Bước 4. Nếu k = n thì dừng. G có mạch âm. Nếu $k \le n-1$ thì trở về bước 2 với k:=k+1

Bài toán đường đi ngắn nhất

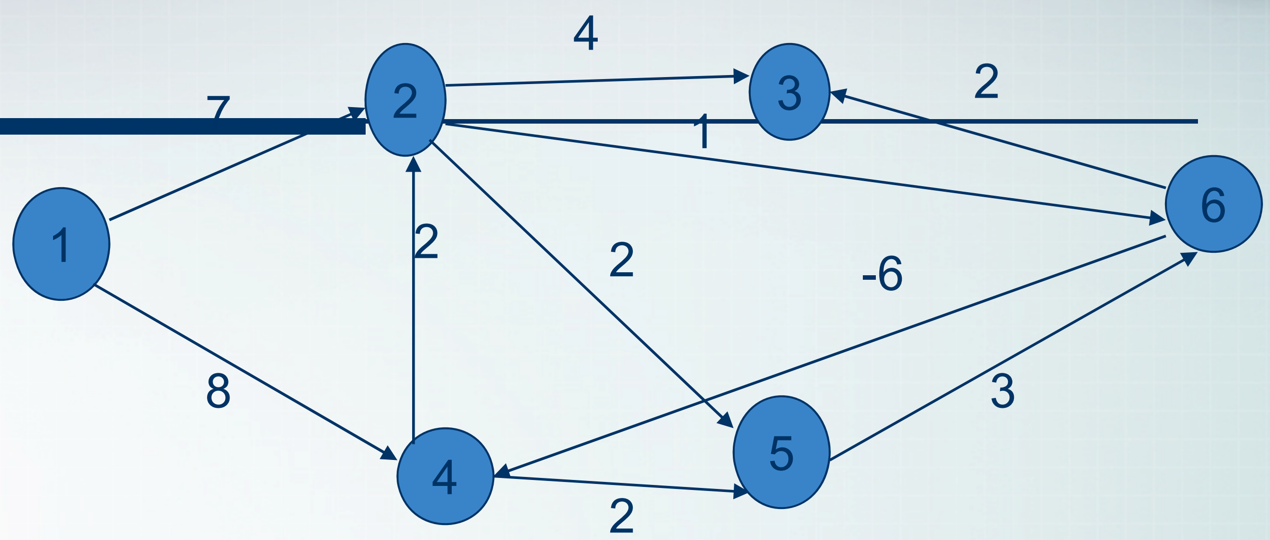
❖ **BT1.**



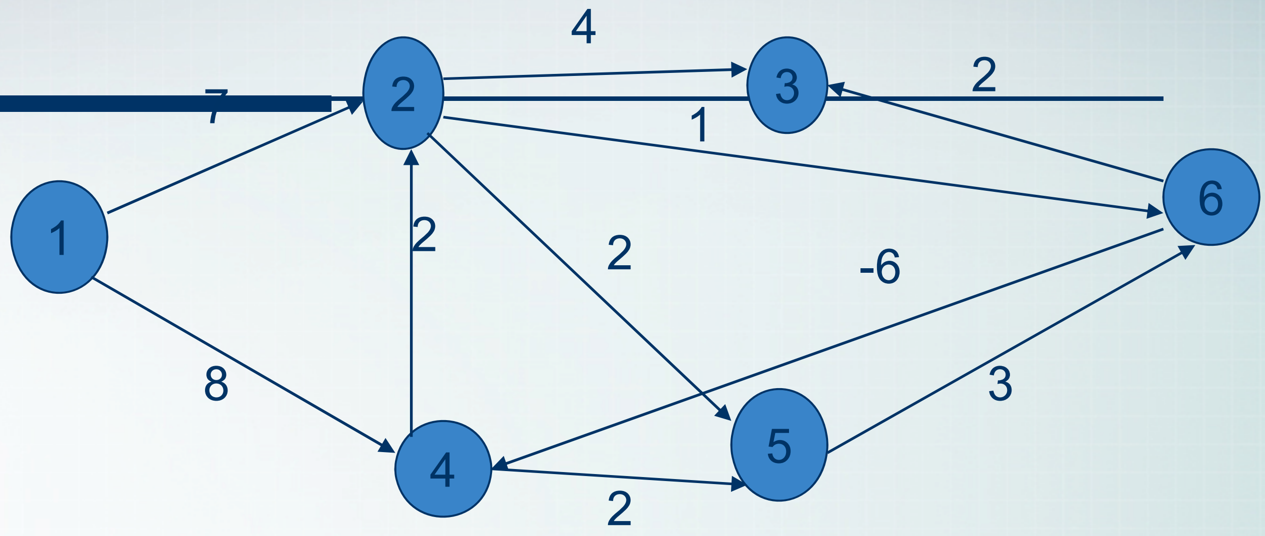
Bài toán đường đi ngắn nhất



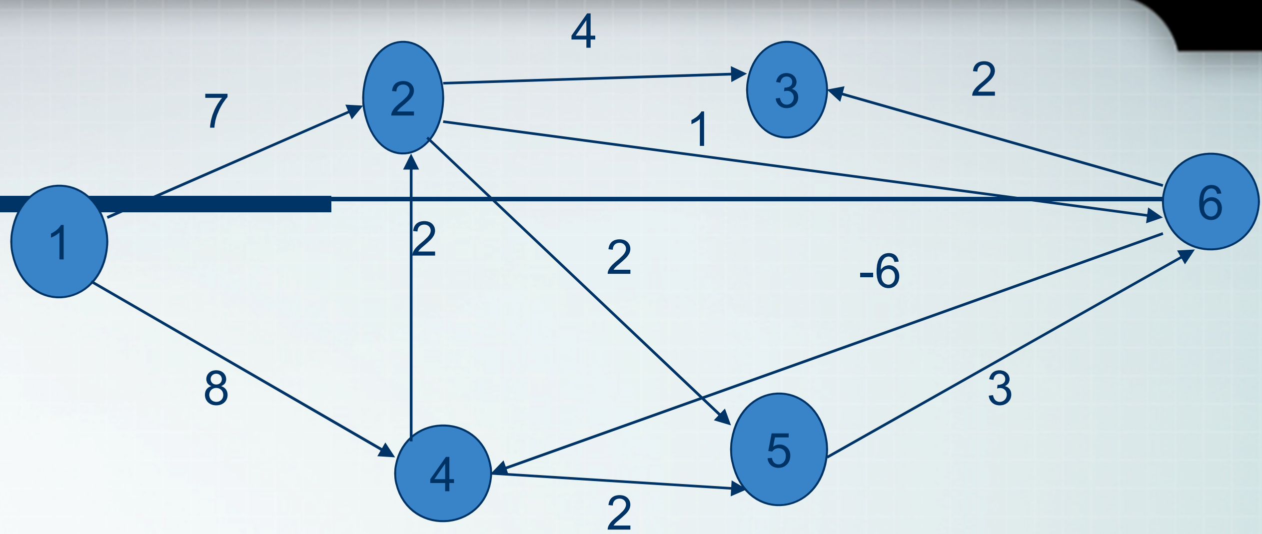
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)



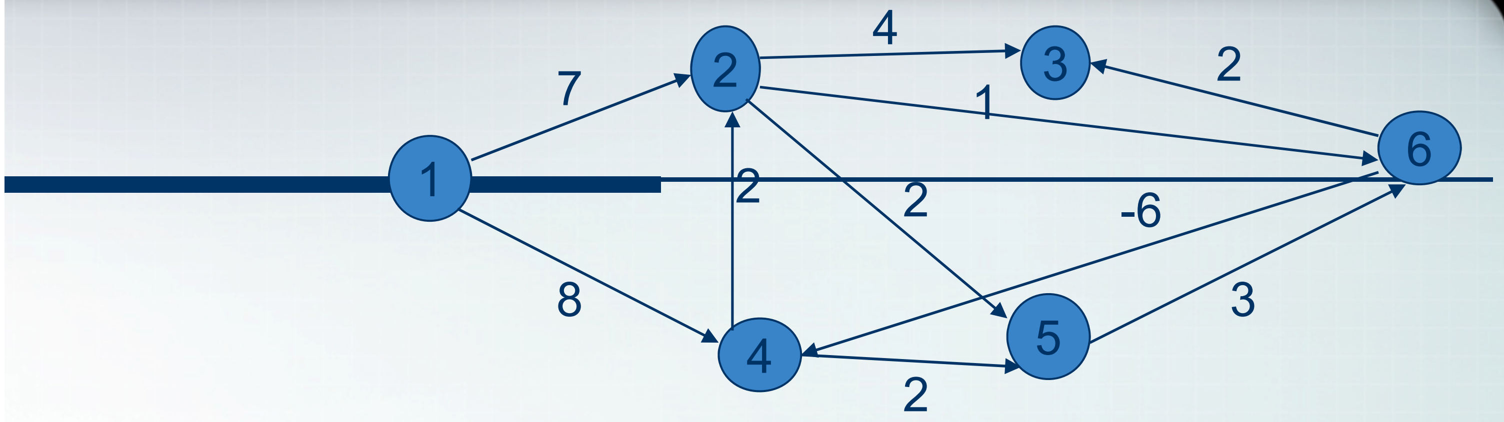
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)



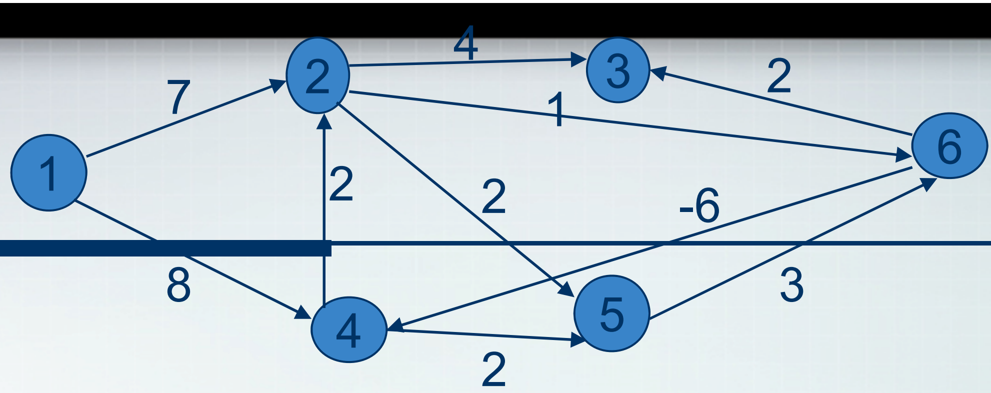
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)



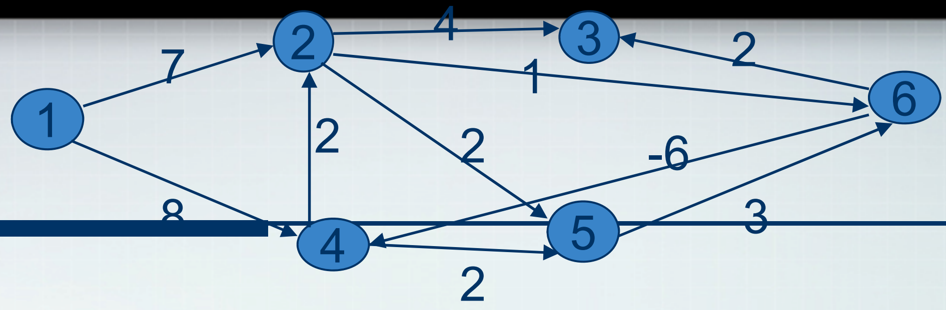
k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)



k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)



k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)



k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)
6	0	(4,4)	(7,6)	(-1,6)	(4,4)	(5,2)

Bài toán đường đi ngắn nhất

k = n = 6 . $L_k(i)$ chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm. Chẳng hạn:

4→2→6→4 có độ dài -3

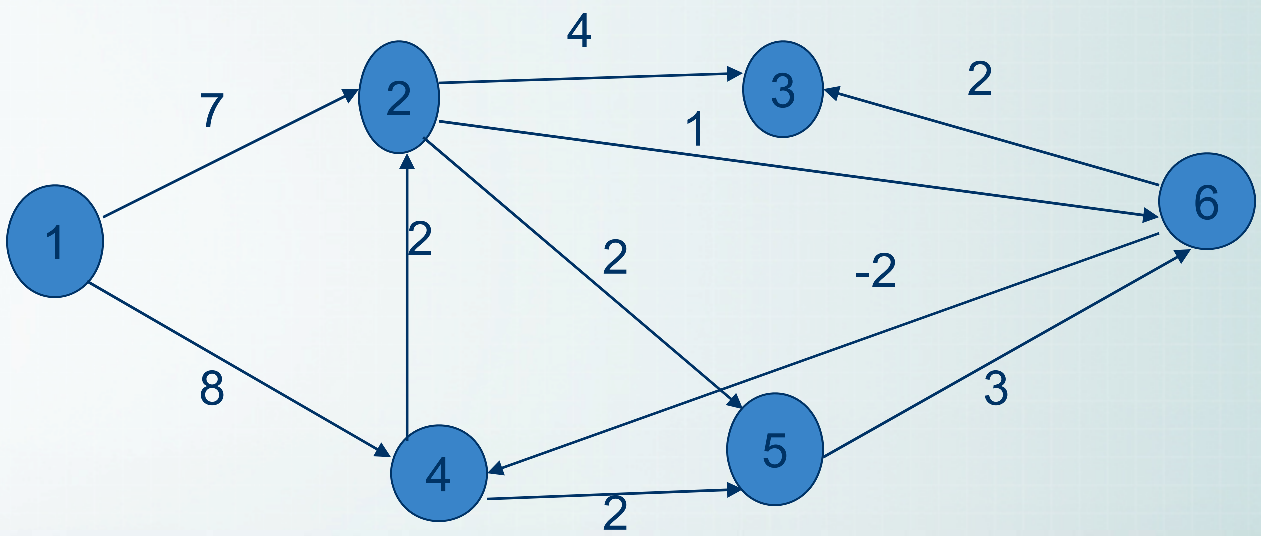
Bài toán đường đi ngắn nhất

k = n = 6 . $L_k(i)$ chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm. Chẳng hạn:

$4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4$ có độ dài -3

Bài toán đường đi ngắn nhất

❖ **BT2.**



Bài toán đường đi ngắn nhất

k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)
5	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)

Bài toán đường đi ngắn nhất